

Boussinesq 方程式に対する高精度安定化有限要素法

中央大学大学院 学生員 ○ 利根川 大介
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

津波や洪水などの防災対策に数値シミュレーションは必要不可欠な存在であり、沿岸域へ来襲する津波の陸上への遡上高および浸水予測は工学上重要である。数値解析手法としては、差分法による解析が一般的であるが、複雑な自然地形や構造物を考慮する際には、任意形状への適合性に優れた有限要素法は有効な手法であると考えられる。

そこで本論文は、支配方程式に波の非線形性と分散性を考慮した Boussinesq 方程式を用い、波の伝播形態を高精度に表現可能な有限要素法に基づく数値解析手法の提案を行うものである。離散化手法に SUPG 法に基づく安定化有限要素法¹⁾を適用し、衝撃捕捉項における安定化パラメータについて検討を行った。数値解析例として孤立波伝播問題⁵⁾を取り上げ、計算結果と実験値との比較を行うことにより本手法の有効性を検討する。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には、Boussinesq 方程式を用い、以下のよう

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} = \mathbf{K} + \mathbf{R} \quad (1)$$

ここで U_i は保存変数であり、以下のようになる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ U_1 H \\ U_2 H \end{bmatrix}, \quad (2)$$

U_i は x, y 方向の断面平均流速、 $H (= h + \zeta)$ は全水深、 h は静水深、 ζ は水位変動量である。また、各ベクトルとマトリックスは以下のようになる。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U_1 H}{\partial x_1 \partial x_i \partial t} \\ \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U_2 H}{\partial x_2 \partial x_i \partial t} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - U_1^2 & 2U_1 & 0 \\ -U_1 U_2 & U_2 & U_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -U_1 U_2 & U_2 & U_1 \\ c^2 - U_2^2 & 0 & 2U_2 \end{bmatrix},$$

$c (= \sqrt{gH})$ は波速、 g は重力加速度、 z は標高値である。また、 $\mathbf{K}, \mathbf{R}, \mathbf{A}_i$ はそれぞれ分散、勾配ベクトル、移流マトリックスである。

(2) 安定化有限要素法

支配方程式 (1) に対して、空間方向の離散化として SUPG 法に基づく安定化有限要素法¹⁾を適用すると以下の重み付き残差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} - \mathbf{R} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot (\mathbf{F}) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau (\mathbf{A}_j)^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} - \mathbf{K} - \mathbf{R} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{SHOC} \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

上式 (3) において左辺 1 項目は Galerkin 項であり、2 項目の要素ごとの積分の総和項は SUPG 法による安定化項であり、3 項目の要素ごとの積分の総和項は衝撃捕捉項である。なお、 $\mathbf{U}^*$ は重み関数である。また τ と ν_{SHOC} は安定化のパラメータであり、第 2 項にある $\mathbf{F}$ は分散項 $\mathbf{K}$ を部分積分したものである。

a) 有限要素方程式

式 (3) に対して、三角形一次要素を用いて空間方向の離散化を行うと、以下に示す有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\tau) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_\tau) \mathbf{U} + \\ & + (\mathbf{S} + \mathbf{S}_\tau) \mathbf{U} + (\mathbf{H} + \mathbf{H}_\tau) \mathbf{R} + \mathbf{T} \mathbf{U} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{T}$ は係数行列であり、添字 τ は SUPG 項に起因する行列を表す。 $\mathbf{T}$ は衝撃捕捉項に起因する行列である。

時間方向の離散化において、時間微分項は次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \quad (5)$$

ここで、保存変数 $\mathbf{U}$ は以下のように定義される。

$$\mathbf{U} = \theta \mathbf{U}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{U}^n \quad (6)$$

(6) における θ は時間積分の安定性と精度をコントロールするパラメータであり、 $\theta=0.5$ の 2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用い、連立一次方程式の解法には、Element-By-Element Bi-CGSTAB 法を適用する。

(3) 安定化パラメータ

衝撃捕捉項は残差に依存した非線形の人工粘性を付加する安定化項である。その安定化を施す人工粘性は、粘性係数に相当する ν_{SHOC} に依存している。

KeyWords: 安定化有限要素法, Boussinesq 方程式, 衝撃捕捉項

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: tone@civil.chuo-u.ac.jp

$$\nu_{SHOC} = \tau_{SHOC} (||\mathbf{u}_{int}||)^2 \quad (7)$$

ここに、 ν_{SHOC} は要素で持つ、毎ステップ変化する安定化パラメータであり、以下に従来及び提案する新しいパラメータを示す。

従来法 (Case1)

従来法は流速のみに依存する安定化パラメータである。この安定化パラメータは非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に提案されたものである。この安定化パラメータは、流速のみに依存し、必ずしも適切とはいえない。

$$\tau_{SHOC} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} |\mathbf{u} \cdot \nabla N_{\alpha}| \right)^{-1}, \quad ||\mathbf{u}_{int}|| = ||\mathbf{u}|| \quad (8)$$

ここに、 N_{α} は形状関数である。

提案法 (Case2)

提案法は流速に加えて、波速、水位の二階微分を考慮に加えた安定化パラメータである。不連続面には二階微分値が大きくなるため、不連続面に重点的に人工粘性が入るように水位の二階微分値を考慮に加えた。また波の非線形性の強弱を表す無次元パラメータ $||\mathbf{u}||/c$ を考慮することにより、斜面などの浅海域における波の増幅に伴う強非線形の際には、値が大きくなり、深海域における伝播段階などの弱非線形の際には、値が小さくなり、過剰な粘性が入らないようになっている。

$$\tau_{SHOC} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} (c|\mathbf{j} \cdot \nabla N_a| + |\mathbf{u} \cdot \nabla N_a|) \right)^{-1} \left(\frac{|\nabla^2 H|}{|\nabla^2 H|_{max}} \right) \left(\frac{||\mathbf{u}||}{c} \right) \quad (9)$$

$$H = h + z, \quad \mathbf{j} = \frac{\nabla H}{||\nabla H||}, \quad ||\mathbf{u}_{int}|| = \sqrt{||\mathbf{u}||^2 + c^2}$$

3. 数値解析例

(1) 孤立波伝播問題

本手法の有効性の検討を行うため、Street らによる水理実験モデル⁵⁾を取り上げる。解析モデルを図-1に示す。水平床と1/20の一樣勾配斜面が組み合わされたものであり、初期状態は、 $x/h=10$ に波峰をもつ波高水深比0.12の孤立波である。有限要素分割は三角形要素を用い、節点数4207、要素数7200であり、微小時間増分量 $\Delta t=0.005[s]$ とした。

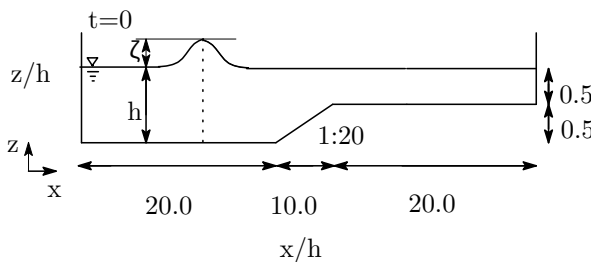


図-1 Street らによる水理実験モデル

(2) 解析結果

本手法の有効性の検討を行うため、図-2にStreet らの水理実験結果との比較を示す。実験値は $x/h=41.6$ 地点の水位の時刻歴である。図-2より、安定化パラメータ case2 は非線形性の強いところで安定化を施し、伝播段階の非線形性の弱いところでは過剰な粘性が入らないようにしてあるため、安定化パラメータ case1 に比べ、波高の減衰が抑えられ、実験値と良い一致を示していることがわかる。

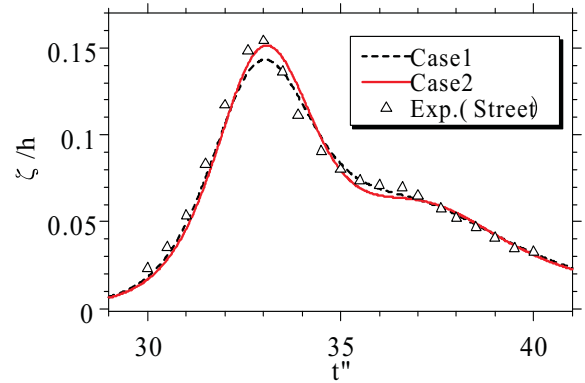


図-2 $x/h=41.6$ における解析結果と実験結果の時刻歴の比較

4. おわりに

本論文では、支配方程式に波の非線形性と分散性を考慮した Boussinesq 方程式を用い、波の伝播形態を高精度に表現可能な数値解析手法の検討を行った。数値解析例として、孤立波伝播問題を取り上げ、実験結果と解析結果との比較を行った。その結果、本手法で提案する波速と水位の2階微分値、波の非線形性を表す無次元パラメータを考慮した安定化パラメータを用いることにより、波の伝播形態を高精度に表現可能であることが確認された。

今後の課題として、構造物を考慮した解析、実地形への本手法の適用などがあげられる。

参考文献

- 1) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in applied Mech.*, 28, pp1-44, 1991
- 2) T.E.Tezduyar, M.Senga : Determination of the shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows, *Computational Mechanics, WCCM VI in conjunction with APCOM '04*, Beijing, 2004.
- 3) 川合伸宜, 田中聖三, 櫻山和男: 浅水長波流れ解析のための安定化有限要素法における安定化項の検討, 土木学会第61回年次学術講演会 (CD-ROM), 2006
- 4) 利根川大介, 川合伸宜, 田中聖三, 櫻山和男: 安定化有限要素法による非線形分散波理論に基づいた津波遡上解析, 土木学会第62回年次学術講演会 (CD-ROM), 2007
- 5) Street, B.L., S.J.Burges, P.W.Whitford : *Dept.Civ.Engng.,Stanford Univ.Tech.Rep.No.93,1968.*