３次元弾性カテナリーケーブル理論と非抗圧膜近似モデルへの応用について

佐賀大学　正会員　井嶋克志　学生会員　角崎勝教
正会員　帯屋洋之　　正会員　川崎徳明

１．まえがき

ケーブルの有限変位解析には軸力部材を用いるもの，曲線要素を用いた有限要素解析，弾性カテナリー理論によるものなどがある．少ない要素分割数のもとに静的および動的解析でも軸圧縮力が発生しない手法は弾性カテナリー理論を用いるものであるが，３次元問題についてはその接線幾何剛性を含めた理論は提案されていないようである．本研究はこの３次元弾性カテナリー理論を導き，ケーブルネットの有限変位解析の一応用例としてケーブルユニットの膜近似モデルによる非抗圧膜構造解析について述べたものである．非抗圧膜に関するこれまでの研究は有限要素を用いた皺解析が主であり，多くは圧縮が作用する弱軸の剛性をゼロとする手法を採用している．しかし，膜構造物の仮設時にように２主軸ともに弛緩した状態にも対応できる解析手法は見当たらない．

２．３次元弾性カテナリーケーブル理論

１ケーブル要素の形状はカテナリーとして，その伸びは弾性則の元に１要素内一様と仮定する．３次元空間内の弾性カテナリーケーブルから直接その接線幾何剛性方程式を誘導することは困難である．しかし，ケーブルそのものは平面ケーブルとして取り扱うことができ，全体構造解析に必要な物理量は節点に結合されたケーブル両端の位置と両端張力のみであることから容易に３次元弾性カテナリー理論を導くことができる．

伸び剛性を EA とするケーブル無応力長を l_0，単位長重量を q_0 とする．図-2 の空間ケーブルは図-1 の平面ケーブルとすることができ，２次元弾性カテナリー理論[1)]からケーブル状態量は $qh/(2H)\equiv\psi$ によって定義される ψ を次式から解くことにより確定する．

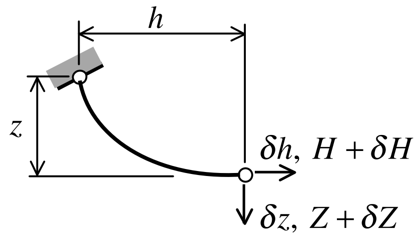

図-1 平面ケーブル

$$f(\psi)=l^2(l-l_0)-\frac{q_0 h l_0{}^2}{4EA}\left(\frac{1}{\psi}+\frac{l^2+z^2}{h^2\tanh\psi}\right)=0 \qquad (1)$$

ここに，l は図-1 の現ケーブル長である．この ψ からケーブル両端の厳密張力を得るとともに，ケーブル端位置の微小増分 $(\delta h,\ \delta z)$ とケーブル端張力の微小増分 $(\delta H,\ \delta Z)$ 間の接線幾何剛性方程式を得る．

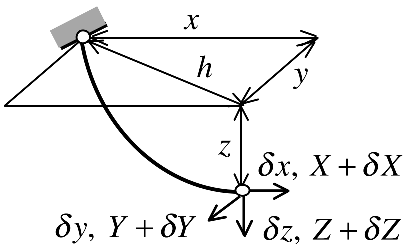

図-2 空間ケーブル

$$\begin{Bmatrix}\delta H\\ \delta Z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_H & k_{HZ}\\ k_{HZ} & k_Z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta h\\ \delta z\end{Bmatrix} \qquad (2)$$

ここに，式(2)の詳細は略す．式(2)から空間ケーブルの接線幾何剛性方程式への拡張は容易であり，平面ケーブルにおける増分変位 δh を空間内水平面２方向成分 $(\delta x,\ \delta y)$ に分解するとともに，張力の水平成分 $H+\delta H$ も同様に２方向成分 $(\delta X,\ \delta Y)$ に分解すれば，次のように空間ケーブルの接線幾何剛性方程式を得る．

$$\begin{Bmatrix}\delta X\\ \delta Y\\ \delta Z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^2 k_H+\beta^2\dfrac{H}{h} & \alpha\beta(k_H-\dfrac{H}{h}) & \alpha k_{HZ}\\ & \beta^2 k_H+\alpha^2\dfrac{H}{h} & \beta k_{HZ}\\ \text{sym.} & & k_Z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

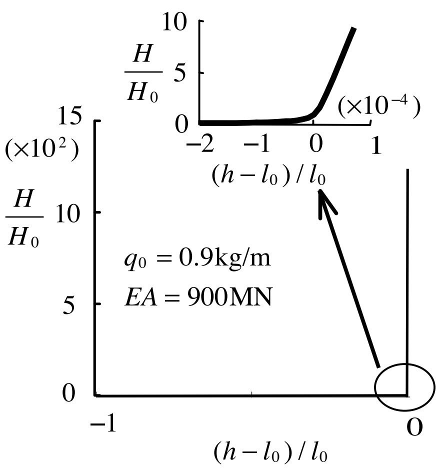

図-3 水平ケーブルの水平張力（H_0:支間長が無応力長のときの水平張力）

キーワード：弾カテナリーケーブル，有限変位解析，非抗圧縮性，膜構造
〒840-8502 佐賀市本庄１佐賀大学理工学部都市工学科 TEL 0952-28-8579

ここに，α, β はケーブルを水平面に投影した線の方向余弦である．ψ から定まるケーブル端張力ならびに式(3)の接線幾何剛性マトリクスは節点変位を一切含まないため，ケーブルが弛緩あるいは緊張などどのような初期状態からでも厳密な解析が可能となる

３．膜近似ケーブルユニット要素

３次元弾性カテナリーケーブル理論を用いれば，局所的に弛緩領域と緊張領域が混在する３次元ネットなどの釣合形状解析も，接点間を１要素として荷重増分を細かくすることなく，初期状態から一挙に大変位後の平衡解を求めることができる．また，この弾性カテナリーケーブルの張力特性は，図-3 に示すように，どのような支点間水平距離であっても張力のみによって支配され，無応力長を超えればほとんどトラス軸力部材の引張特性と同じになる．したがって，この弾性カテナリーケーブルによってトラスユニットを組み，非抗圧膜と等価な挙動を示す膜近似要素を用いるならば膜構造物の弛緩から緊張状態までを容易に解析できることが予想される．

本研究では，図-4 に示す三角形定ひずみ膜要素と緊張時に等価な挙動となる図-5 のケーブルユニット要素を導き，膜構造物の解析を行った．ケーブルユニット要素は，６本の軸力部材により各辺と各頂点から要素内部に射出する部材が三角形の内心の位置で結合するものを用いる．このときケーブルユニットの剛性方程式が定ひずみ膜要素のそれと等価となるには要素形状が正三角形の場合であり，各ケーブルの伸び剛度は次式となる．

$$k_{l1} = k_{l2} = k_{l3} = \frac{\sqrt{3}Et}{3(1+\nu)},\ k_{i1} = k_{i2} = k_{i3} = \frac{\sqrt{3}Et(3\nu-1)}{2(1-\nu^2)} \qquad (4)$$

ここに，E：ヤング率，ν：ポアソン比，t：膜厚である．

４．数値計算例

膜近似ケーブルユニット要素による数値計算例として，図-6 の一辺 3m の正六角形膜($E = 9\times10^5$kN/m^2 ，$\nu = 0.458$ ，t=1mm，単位体積重量: 8.82kN/m^3)を用いた．まず，ケーブル要素が全要素緊張時であるとき定ひずみ膜要素による計算結果と等しいことを確認する．六角形全辺固定として等分布満載荷重による膜中央点の鉛直変位を求めたものが，図-7 がその結果である．２つの異なる要素による鉛直変位はほぼ等しく，荷重強度 8kN/m^2 による中央点変位の誤差は約 1/1000 であった．次に，ケーブル要素のみ可能な平面膜弛緩状態の解析として，正六角形の３辺(AB, CD, EF)を固定し，その３辺を膜中央点に 1m 近づけた弛緩状態を初期状態とする解析を行った．この状態から点 G を鉛直上方に 2m 一挙に持ち上げその釣り合い形状を求めたものが図-8 である．

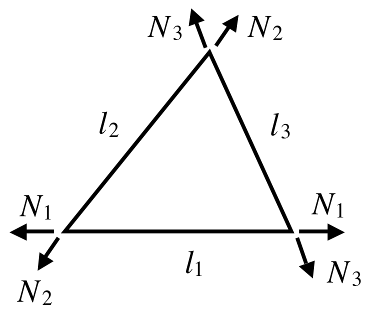

図-4 定ひずみ膜要素と要素端力

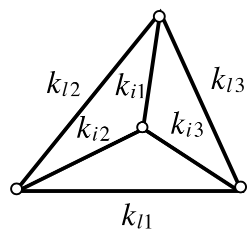

図-5 ケーブルユニット要素

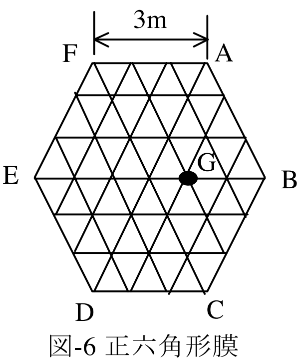

図-6 正六角形膜

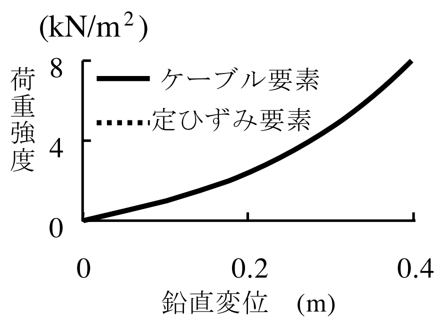

図-7 等分布満載荷重による中点の鉛直変位

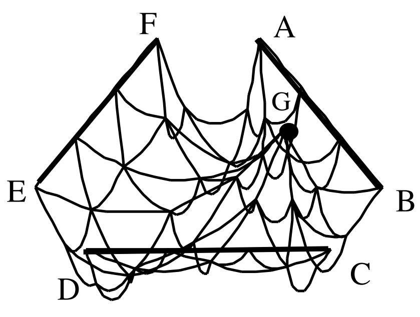

図-8 六角形膜の弛緩状態

参考文献：1)後藤茂男:柔ケーブル材の接線剛性方程式について，土木学会論文報告集，第 270 号，1978.

2)Sato, Ijima, Obiya and Kawasaki: Large displacement analysis of sagged nets in three-dimensional space, APCOM'07 in conjunction with EPMESC XI, 2007, Kyoto, Japan