

骨組断面力の影響線展開の定常化について

法政大学 正会員 阿井 正博*

1. はじめに はり系, トラス系の変位影響線に Betti の定理, Maxwell の定理, 断面力の影響線には Müller-Breslau の原理が古典的に確立されており, 近年の離散化解析での具体的な展開について これまで 幾つかの方法が示されている。例えば, 文献1)では “Müller-Breslau の原理を利用する場合, 不連続点の導入のために構造が不安定になり変位法の通常の解析ルーチンでは処理できない”, 文献2)は FEM 解析での影響線の展開であり, “2桁の一致がみられた”とある。変位影響線は相反作用定理の直接適用にあるが, 断面力影響線に関しては 離散系での正確な展開が十分には認識されていない様子がある。

2. Müller-Breslau の原理 後述のマトリックス構造解析での影響線展開がこの原理の正確適合にあることの確認のために, 簡潔に記述しておく。

与系構造中に生じる反力, 断面力は, 支持拘束, 断面接合性の維持によって生じる内力である。1 点 k に生じる内力 F_k の影響線を展開するために, その内力方向 (k -方向) の拘束を外して, 任意点 s の単位荷重 $P(s)=1$ に対する与系での未知量である $F_k(s)$ を外力として k -方向に作用させて考えれば, k -方向の変位 $\delta_k=0$ が維持されて与系と同じつり合い状態にある(第1系)。次に, 拘束開放された同じ構造で, k -方向に強制変位 δ_k^* (作用力 F_k^*) を与えたつり合い状態において, 単位荷重方向に生じる“変位”を $v_k^*(s)$ とする(第2系)。同じ構造での 2 系であり “Betti の相反性”によって, 第1系の外力 $P(s)$, F_k が第2系の変位 $v_k^*(s)$, δ_k^* においてする外力仕事は, 第2系の F_k^* が第1系の変位でする仕事に等しいのであるが, 第1系では F_k の作用によって $\delta_k=0$ が維持されており

$$F_k(s) \cdot \delta_k^* + P \cdot v_k^*(s) (= F_k^* \cdot \delta_k) = 0 \quad (1)$$

にある。このとき, 第2系の F_k -方向の強制変位を $\delta_k^*=-1$ で考えれば ($P=1$)

$$F_k(s) = v_k^*(s) \quad (2)$$

の関係となり, 与系での任意点の荷重 $P(s)$ に対する注目内力の $dF_k/dP(s)$ が, 線形系である限り F_k -方向に -1 の強制変位を与えたときの $P(s)$ -方向の変位に一致するのである。

3. 骨組構造での具体展開 離散系での注目要素 (m) の両端断面力 $\{M, Q, N\}$ に関する影響線の展開手順について述べる。Fig. 1 に示すのは, 節点 i, j に接続する要素 (m) 単独での始端の M_0, Q_0, N_0 それぞれの方

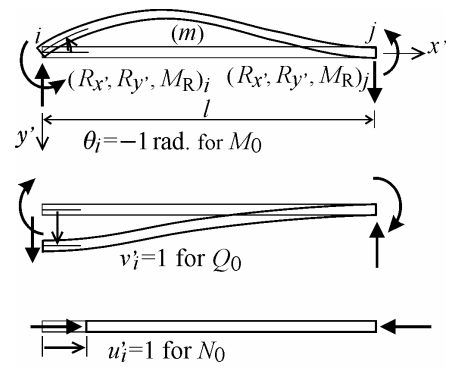
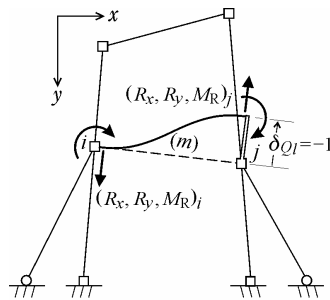
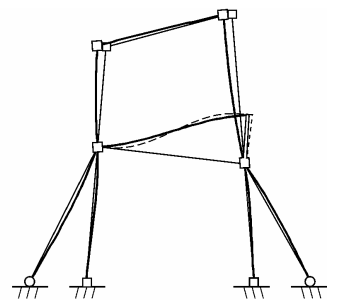


Fig.1 端断面力方向に-1の変位

向の -1 の変位であり (終端の M_i, Q_i, N_i に対しては反対方向), その変形状態を維持する節点力を $\mathbf{R}_{(m)} = \{(R_x, R_y, M_R)_i, (R_x, R_y, M_R)_j\}$ とする。

断面力 $F_{(m)}$ の影響線に注目するとき, $\mathbf{R}_{(m)}$ を作用させた自己変形のままの (m) を構造に対して $\delta_F=-1$ の位置に固定接合して構造構成する。節点 i, j の $\mathbf{R}_{(m)}$ が要素 (m) の変形のみとつり合っている全体状態にあるが, その上で $\mathbf{R}_{(m)}$ を外せば, それにつり合っていた部材 (m) の両端の断面力が節点 i, j に伝達されて構造全体に変位, 変形を生じて, (m) 自身も変形して構造変位に相対する $\delta_F=-1$ は維持される。その結果は 構造への強制変位 $\delta_F=-1$ に対するつり合い状態にあり,

Fig. 2 $Q_{(m)l}$ に対する構造接合Fig. 3 $\mathbf{R}_{(m)}$ の開放 $\Rightarrow Q_{(m)l}$ -線

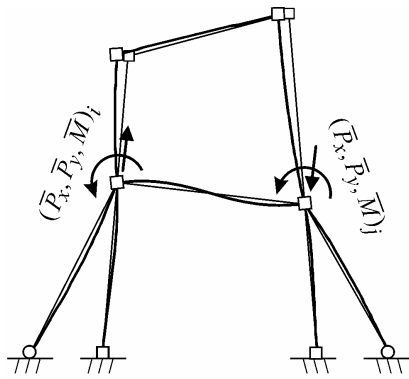
初期形状 ($\delta_F=0$) からのその変位が $F_{(m)}$ の影響線に一致することになる。

Fig. 2~4 に示すのは, 部材 (m) のせん断力 Q_l を例とした説明図である。節点 j を剛体として単位長さに延長して, その先端に $\mathbf{R}_{(m)}$ によって $\delta_{Ql}=-1$ に変形された (m) の終端を直角に接続すれば 前述した構造構成となり, (m) 自身の δ_{Ql} を維持している節点 i, j の $\mathbf{R}_{(m)}$ を開放すれば, 構造への強制変位 δ_{Ql} に対する全体の変位が Fig. 3 のように決まり, それが Q_l -線に一致するのである。

以上に対する実際の数値解析は次のように簡略化できる。影響線の本来の意味は, 任意点 s の荷重の微分増分 $dP(s)$ に対する注目内力 F_k の微分関係 $dF_k/dP(s)$ の展開にあるが, 線形系では $P(s)=1$ に対する F_k の計算

キーワード: 骨組構造, 影響線, 断面力

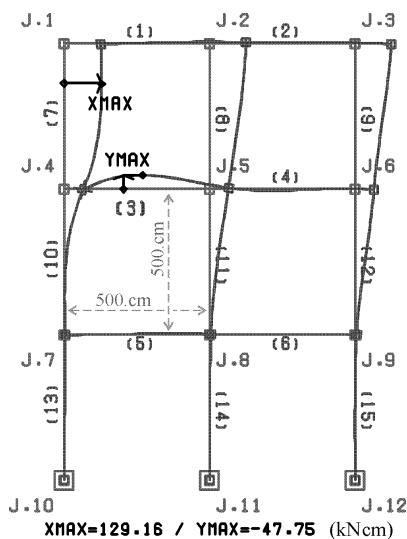
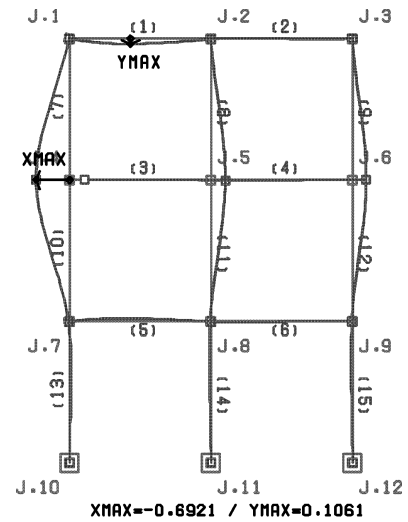
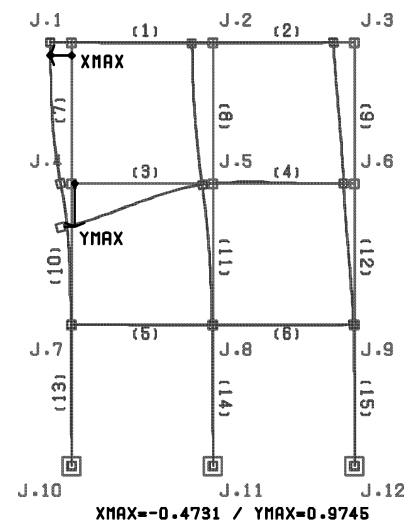
* 連絡先: 〒184-8584 小金井市梶野町 3-7-2

Fig. 4 $(\bar{P}_i, \bar{P}_j) = -R_{(m)}$ に対する構造変位

によってその微係数が直接得られる(非線形系であっても各構造状態の接線剛性の上で同様に線形計算できる)。Fig. 2→3の要素(m)両端の $R_{(m)}$ の開放による構造変位は、Fig. 1で得た $R_{(m)}$ に対するその反対方向の節点外力 $(\bar{P}_i, \bar{P}_j) = -R_{(m)}$ を元々の構造に作用させたFig. 4の変位に同じにある。

本文での影響線は、Müller-Breslauの原理の下に、注目断面力 F_k 方向の強制微分変位 δ_k を独立変数として、それに対する離散系のつり合い諸量を線形展開するのみであり、以下の手順が一般に成立する：要素(m)の端断面力 F_k を影響線展開するには、最初に(m)の要素剛性 $[k]_{(m)}$ の上で F_k 方向への $\delta_k = -1$ の変位による両端節点力 $R_{(m)}$ を用意する(その自己変位を $\{u'(s), v'(s)\}_{(m)}$)。次に構造剛性 $[K_N]$ において、(m)の両側節点 i, j への外力 $(\bar{P}_i, \bar{P}_j) = -R_{(m)}$ に対する全可動自由度の節点変位 $\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ を求めて各点の変位 $\{u(s), v(s)\}$ が決まるが(Fig. 4)、要素(m)にのみ端部の $\delta_k = -1$ による最初の自己変位 $\{u'(s), v'(s)\}_{(m)}$ (Fig. 1)を加えることによって、 F_k -線が得られる。

4. 数値計算例 Fig. 5の矩形ラーメン($E=206$ GPa, $A=84.12$, $I=23700$, パネル幅, 高さ=500 cm)で、部材(3)の節点4側断面の M_0 , N_0 , Q_0 の影響線を本文手順で数値展開した。

Fig. 5 $M_{(3)0}$ の影響線Fig. 6 $N_{(3)0}$ の影響線Fig. 7 $Q_{(3)0}$ の影響線

以上の結果の精度を、節点荷重に対して調べた： $M_{(3)0}$ 、 $Q_{(3)0}$ 線の値は 節点3のx-方向に125.25, -0.47017にあり、 $P_{3x}=100$ kNでのつり合い計算で12525 kNcm, -47.017 kNにあった。 $N_{(3)0}$ 線は節点6のx-方向に0.29005にあり、 $P_{6x}=100$ kNに対して $N_{(3)}=29.005$ kNにあった。本文の影響線が、Müller-Breslau原理の離散化骨組系への直接正確な展開にあることが確認される。

〈文献〉 1) 山下清明, 久保文男: 変位法プログラムにおける影響線の求め方について, 土木学会年次学術講演会 第1部, 1975, pp. 52-53.; 2) 小寺徹, 古市亨, et al.: ミューラーブレスローの原理を応用したFEM解析による影響面の作成, 土木学会年次学術講演会 第1部, 2003, pp. 427-428.; 1) 久堀内勇治, 山下清明: FEMモデルの影響線について, 土木学会年次学術講演会 第1部, 2004, pp. 1059-1060.