

厚板の動的応答解析への BF-spline Ritz 法の適用

大同工業大学大学院 学生員 ○和田 裕明 大同工業大学 正員 水澤富作

1. はじめに 走行車両や衝撃荷重を受ける厚板の動的解析は、平板の動的設計上重要な課題であるが、薄板の研究と比較して、有限要素法を適用した研究を除くと、任意の境界条件を有する厚板の動的応答解析はさほど多く研究されていない。著者らは、BF-spline Ritz 法^{1),2)}を定式化し、Mindlin 板の応答解析³⁾への適用について検討を行い、他の数値解析法の結果と比較して、良好な解析精度を得ている。

本研究では、BF-spline Ritz 法と modal analysis 法を用いて、ステップ荷重を受ける等方性 Mindlin 板の動的応答解析を行い、応答に与える各モードの影響率やステップ関数の影響について明らかにしている。

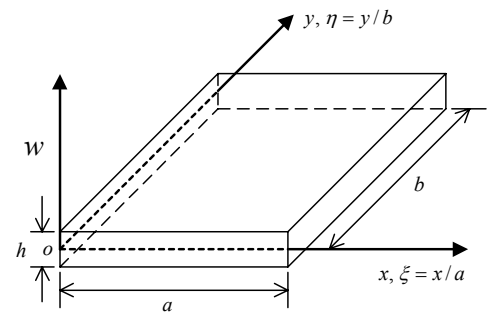


図-1 長方形厚板と座標系

2. BF-spline Ritz 法による定式化 Mindlin 板理論で仮定される3つの独立した変位関数(たわみ w と2つの回転角 (ϕ_x, ϕ_y))は、境界関数と B-spline 関数を掛け合わせた許容関数で表し、無次元極座標系 $(\xi = x/a, \eta = y/b)$ を用いれば、それぞれ次式で仮定される。

$$\phi_x(\xi, \eta) = F_x(\xi)G_x(\eta) \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \quad , \quad \phi_y(\xi, \eta) = F_y(\xi)G_y(\eta) \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \quad ,$$

$w(\xi, \eta) = F_w(\xi)G_w(\eta) \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta)$ (1) ただし、 $N_{m,k}(\xi)$ 、 $N_{n,k}(\eta)$ は、 $k-1$ 次の正規化された B-spline であり、 A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} はそれぞれ未定係数である。 $i_x = k-2 + m_x$ 、 $i_y = k-2 + m_y$ 、 $k-1$ は B-spline 関数の次数、 m_x と m_y はそれぞれ ξ 方向と η 方向に設けた区分点の数である。また、 $F_i(\xi)$ と $G_i(\eta)$ は、それぞれの境界辺で与えられる幾何学的境界条件を満たす境界関数である¹⁾。

等方性な長方形 Mindlin 板のひずみエネルギー U と運動エネルギー T は、それぞれ次式で与えられる。

$$U = \frac{D}{2} \left(\frac{a}{b} \right) \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right)^2 + \nu \left(\frac{b}{a} \right) \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \xi} \right) \right]^2 + 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left[\left\{ \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + \phi_x \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right) + \phi_y \right\}^2 \right] \right\} d\eta d\xi \\ = \frac{D}{2} \left(\frac{a}{b} \right) \{X\}_{mn}^T [K]_{mnrs} \{X\}_{rs} \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 a b^3 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ W^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right\} d\eta d\xi = \frac{1}{2} \omega^2 \{X\}_{mn}^T [M]_{mnrs} \{X\}_{rs} \quad (3)$$

ここで、 $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ は、剛性マトリックスと質量マトリックスであり、 D は板の曲げ剛性、 κ と ν はそれぞれせん断修正係数とポアソン比である。また、 ρ は密度、 ω は円振動数(rad/sec)である。

したがって、Ritz 法を適用して、板の全ポテンシャルエネルギー $\Pi = U - T$ を未定係数ベクトルで極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。 $\partial \Pi / \partial \{X\}_{rs} = ([K]_{mnrs} - \omega^2 [M]_{mnrs}) \{\Delta\}_{mn} = 0$ (4)

ここで、 $\{X\}_{mn} = \{\{\delta_A\}_{mn} \quad \{\delta_B\}_{mn} \quad \{\delta_C\}_{mn}\}^T$ 、 $m, r = 1, 2, \dots, i_x$ 、 $n, s = 1, 2, \dots, i_y$ 、 ω は円振動数(rad/sec)であり、また

$\{X\}_{mn}$ は正規化された振動モードに対応する係数パラメータである。

次に、ステップ荷重を受ける平板の動的応答解析は、modal analysis 法(modal displacement method)を用いて定式化する。

キーワード BF-spline Ritz 法, modal analysis 法, 動的応答解析, Mindlin 板, 応答性状

〒457-8532 名古屋市南区白水町 40 都市環境デザイン学科 電話 052-612-5571

ステップ荷重を受ける平板の運動方程式は、減衰の影響を無視すると、次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (5)$$

ここで、 $[M]$ と $[K]$ は、式(4)に示す剛性行列と質量行列であり、 $\{x\}$ と $\{f(t)\}$ はそれぞれ一般化変位ベクトルと外力ベクトルである。式(4)の固有値計算より、 i 次の固有値 ω_i と固有ベクトル $\{X\}_i$ が求められる。変位ベクトル $x(t)$ は、 r 個の固有ベクトルからなるモーダル行列 $[X]$ と一般化座標ベクトル $\{q(t)\}$ に分離して、 $\{x(t)\} = [X]\{q(t)\}$ で表される。モーダル行列 $[X]$ を用いて、式(5)を書き換えると、次式で表される。

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{q}\} + [X]^T[K][X]\{q\} = [X]^T\{f(t)\}; \quad [X]^T[K][X] = [I], \quad [X]^T[M][X] = [\omega_i] \quad (6)$$

また、外力ベクトルは、 $[X]^T f(t) = \{Q(t)\}$ で表されるので、モーダル行列の直交性により i 次モードに対する一自由度系の運動方程式が得られる。

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = Q_i(t); i = 1, 2, \dots, r \quad (7)$$

したがって、与えられた初期条件の下に式(7)を解けば、動的応答が求められる。

3. 数値計算例および考察

ここで応答時間は、次式の無次元 時間 τ で表す。

$$\tau = t / (a^2 \sqrt{\rho h / D}) \quad (8)$$

図 - 2 には、等分布ステップ荷重を受ける周辺固定された正方形板 (CC-CC, $a/b=1$) の中央点での 1 次モード、6 次モード及び 11 次モード別に求めた動たわみ曲線が示してある。これらのモードは、図に示すように板中央点の動たわみに関係するモードである。ただし、 $b/h=10$ と $\tau_1=0.5$ に仮定している。この図より、1 次モードから求めた応答は、他の高次モードから求めた値と比較して、非常に大きな値を示している。

次に、等分布ステップ荷重を受ける平板の最大応答値に対する各モードの応答値の

影響率を調べるために、採用モード数 r を 21 にして求めた最大応答値に対する各モードの応答値の影響

率が、図 - 3 に示してある。ただし、 $b/h=10$ と $\tau_1=0.5$ に仮定し、境界条件は、それぞれ周辺固定 (CC-CC) と周辺単純支持 (SS-SS) としている。これより、最大動たわみに与える 1 次モードの影響率は、95%以上を示し、2 次モード以降の影響が非常に小さくなっている。また、1 次モードの影響度は、単純支持板の値と比較して、周辺固定板の値が若干小さく現れている。

4. まとめ 得られた結果をまとめると、以下ようになる。

- 1) 等分布ステップ荷重を受ける周辺固定板の最大動たわみに与える 1 次モードの影響率は、95%以上を示し、6 次モード以降の影響が非常に小さくなっている。
- 2) 1 次モードの影響率は、周辺固定板の値が単純支持板と比較して、若干小さく現れている。

参考文献 1) 名木野他: BF-spline Ritz 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析, 応用力学論文集, Vol. 9, pp. 341-352, 2006. 2) 水澤: BF-spline Ritz 法を用いた長方形厚板の曲げ解析, 構造工学論文集, Vol. 53A, pp. 1-12, 2007. 3) 和田他: BF-spline Ritz 法を用いた Mindlin 板の動的応答解析: H.19 年度土木学会中部支部研究発表会, 2008, I-36.

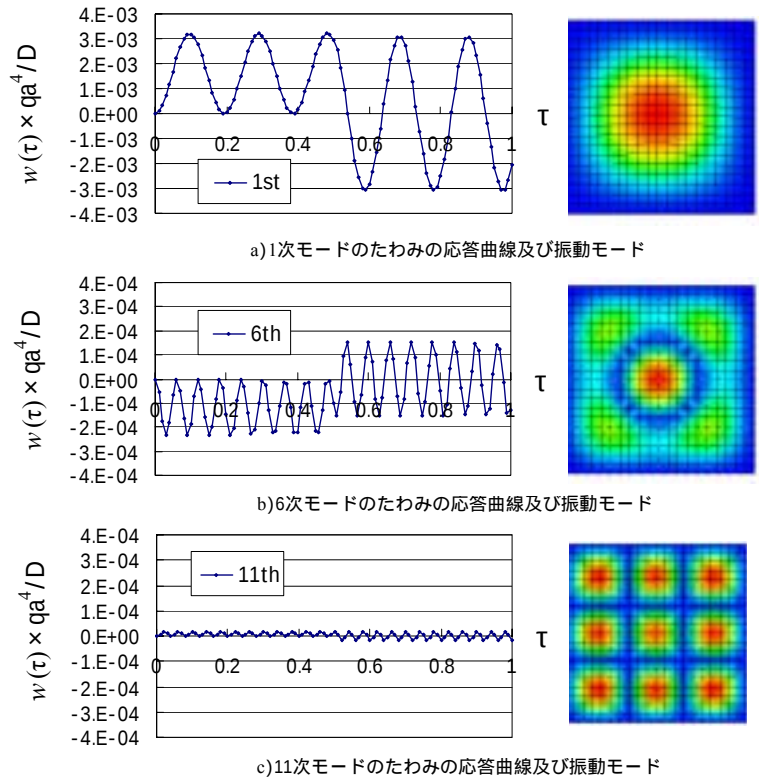


図 - 2 等分布荷重を受ける周辺固定板の動たわみ w の各モードの影響率; $b/h=10$, $\tau_1=0.5$

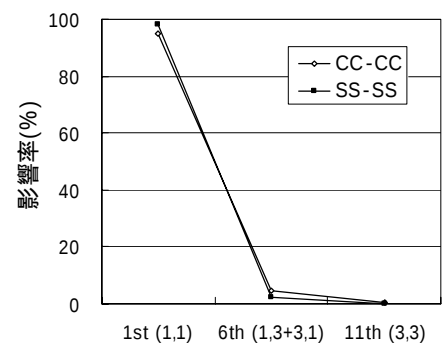


図 - 3 各モードの応答値の影響率に与える境界条件の影響; $b/h=10$, $\tau_1=0.5$