

領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ半無限弾性波動場の逆散乱解析手法の提案

(株) システムインテグレータ 正会員 岩崎健太郎
東京理科大学 正会員 ○東平光生

1 はじめに

波動方程式を計算機上で解くことは、地震波動解析などの分野で土木工学とも深く関わっている。本研究では、波動解析の一つの手法として、媒質の揺らぎと波動場を結びつける利点をもつ領域積分方程式に対して Fourier 変換を施し波数領域の方程式にし、FFT と Krylov 部分空間反復解法¹⁾を組み合わせる手法を提案してきた²⁾。本論文では、領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ半無限弾性波動場における逆散乱解析の定式化を展開し、数値計算結果を示す。

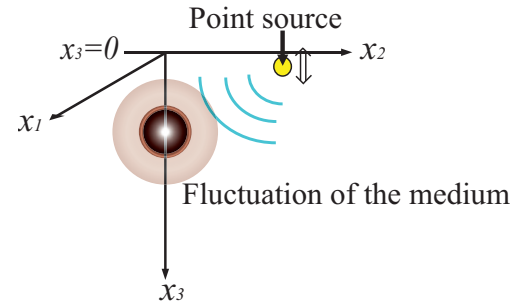


図-1: 解析モデル

2 解析手法の概要

2.1 問題の定義

ここでは図-1 に示すように鉛直下向きに x_3 軸をとり、 $x_3 = 0$ km での x_1-x_2 平面を地表面とする。このとき、点震源で発生した入射波が媒質の揺らぎに照射し、散乱波を生じる問題を扱う。そして、全波動場が既知のとき、Lamé 定数の変動部分を推定する逆散乱問題を扱う。弾性波動場は3次元で、媒質の Lamé 定数は次のように表せると仮定する。

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{x}) &= \lambda_b + \tilde{\lambda}(\vec{x}) \\ \mu(\vec{x}) &= \mu_b + \tilde{\mu}(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}_+^3)\end{aligned}\quad (1)$$

ここに、 λ, μ は Lamé 定数であり、添え字の b は Lamé の定数が一定の部分を表す。また、 $\tilde{\lambda}$ および $\tilde{\mu}$ は Lamé 定数の変動部分を表す。すなわちここでは、散乱波動場から $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ を推定する。

2.2 波領域数における領域積分方程式

媒質の揺らぎを支配方程式の非同次項とみなし領域積分方程式を構成する。そして、領域積分方程式を境界条件を考慮した Fourier 変換 (以降の議論では一般化 Fourier 変換³⁾と呼ぶ) を適用することで次式を得る³⁾。

$$\begin{aligned}\hat{v}_i(\vec{\xi}) &= -\hat{h}(\vec{\xi}) \mathcal{U}_{ij} N_{jk}(\vec{x}) \mathcal{U}_{kl}^{-1} \hat{f}_l(\vec{\xi}) \\ &\quad -\hat{h}(\vec{\xi}) \mathcal{U}_{ij} N_{jk}(\vec{x}) \mathcal{U}_{kl}^{-1} \hat{v}_l(\vec{\xi})\end{aligned}\quad (2)$$

ここに、 $\hat{v}_i$ は散乱波、 $\hat{h}$ は波数領域の Green 関数、 $\hat{f}$ は入射波、 $\hat{q}_j, N_{jk}$ は媒質の揺らぎとその勾配に関係した関数である。 $\mathcal{U}$ は一般化 Fourier 変換の演算子、 $\mathcal{U}^{-1}$ は一般化

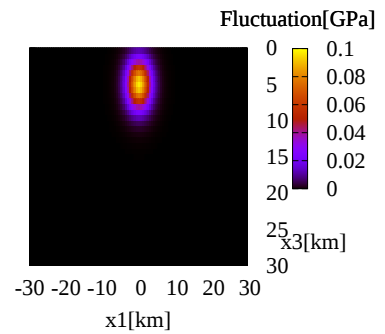


図-2: Lamé 定数の空間変動分布 ($x_2 = 0$ km)

Fourier 逆変換の演算子である。また、 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3$ は空間領域のベクトル、 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}_+^3$ は波数領域のベクトルであり、 x_3, ξ_3 は正の値のみを持つ。さらに、 $\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ は3次元半無限空間を表す。

2.3 逆散乱解析に対する領域積分方程式の定式化

式(2)の両辺を $-\hat{h}(\vec{\xi})$ で割り、 $\mathcal{U}^{-1}$ を乗じることで次式を得る。

$$\mathcal{U}_{ji}^{-1} \hat{F}_i(\vec{\xi}) = N_{jk}(\vec{x}) \mathcal{U}_{kl}^{-1} (\hat{f}_l(\vec{\xi}) + \hat{v}_l(\vec{\xi})) \quad (3)$$

ここで、

$$\hat{F}_i(\vec{\xi}) = -\hat{v}_i(\vec{\xi}) / \hat{h}(\vec{\xi}) \quad (4)$$

である。また、媒質の揺らぎは波動ではないため、境界条件を含んだ一般化 Fourier 変換を用いる必要がない。したがって、3次元の Fourier 変換を用いることが可能である。

キーワード: 領域積分方程式, 一般化 Fourier 変換, Fourier 積分変換, Krylov 部分空間反復解法, FFT

〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4075)

このとき式 (3) は次のように表せる.

$$\mathcal{U}_{ji}^{-1} \hat{F}_i(\vec{\xi}) = \left(M_{jk}^{(f)}(\vec{x}) + M_{jk}^{(v)}(\vec{x}) \right) \mathcal{F}^{-1} \hat{q}_k(\vec{\eta}) \quad (5)$$

ただし, $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}_+^3$ は波数領域のベクトルであり, 先に示した $\vec{\xi}$ とは異なる値をとる. また,

$$(q) = (\partial_1 \tilde{\lambda} \quad \tilde{\lambda} \quad \tilde{\mu})^T \quad (6)$$

$$[M^{(s)}] = \begin{pmatrix} \varepsilon & \partial_1 \varepsilon & \partial_1 \varepsilon + \eta_1 + 2\varepsilon_{11} \partial_l \\ 0 & \varepsilon \partial_2 + \partial_2 \varepsilon & \partial_2 \varepsilon + \eta_2 + 2\varepsilon_{2l} \partial_l \\ 0 & \varepsilon \partial_3 + \partial_3 \varepsilon & \partial_3 \varepsilon + \eta_3 + 2\varepsilon_{3l} \partial_l \end{pmatrix} \quad (7)$$

とする. ここに,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \partial_l s_l \\ \eta_j &= (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) s_j \\ \varepsilon_{jk} &= (1/2)(\partial_j s_k + \partial_k s_j) \end{aligned} \quad (8)$$

である. s は v または f である. 式 (5) を FFT と Krylov 部分空間反復解法を用いることで, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ が得られる. これらを Fourier 変換することで媒質の揺らぎが求められることができる.

3 数値計算結果

ここでは, 入射波が図-2 に示す媒質の揺らぎに照射し, 散乱波を生じる問題を考える. 具体的に Lamé 定数は $\lambda_b = 4$ GPa, $\mu_b = 2$ GPa とし, 空間変動部分は

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\vec{x}) &= 0.1 \exp(-0.1|\vec{x} - \vec{x}_0|^2) \\ \tilde{\mu}(\vec{x}) &= 0.1 \exp(-0.1|\vec{x} - \vec{x}_0|^2) \quad [\text{GPa}] \end{aligned} \quad (9)$$

と表現する. 揺らぎの中心座標 $\vec{x}_0$ は, $\vec{x}_0 = (0, 0, 5)$ とする. また, 入射波 $f(\vec{x})$ は点震源からの波動とし

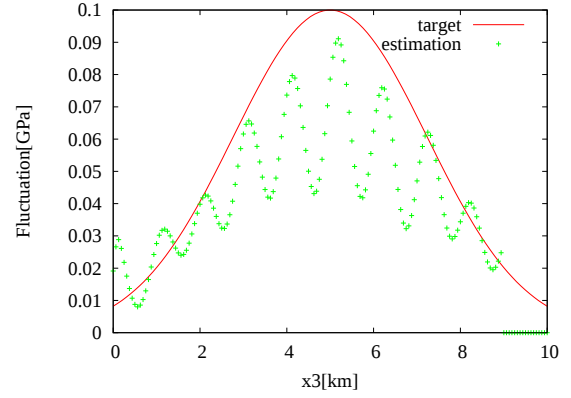
$$f_i(\vec{x}) = G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_s) p_j A \quad (10)$$

とおく. ここで G_{ij} は Green 関数である. ここに, A は入射波の振幅であり $A = 1.0 \times 10^{-5}$ km, p_j は方向ベクトル $p_j = (0, 0, 1)$, $x_s = (0, 0, 0)$ は震源位置である. さらに, 領域積分方程式の適用においては, 式 (2) にも示したように f の一般化 Fourier 変換を用いる. このとき $\hat{f}_i(\vec{\xi})$ は次のようになる²⁾.

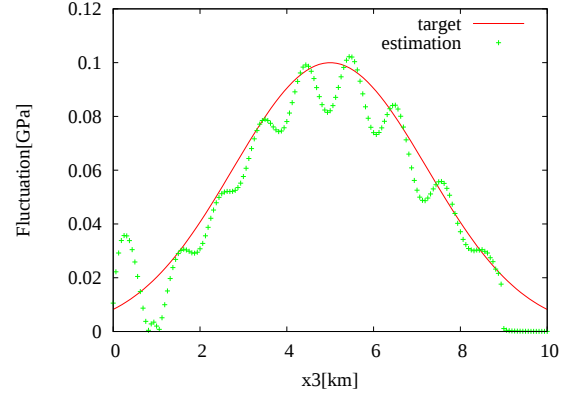
$$\hat{f}_i(\vec{\xi}) = \hat{h}(\vec{\xi}) \Lambda_{lj}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) p_j A \quad (11)$$

収束条件は, 解くべき連立方程式を $Ax = b$ とし, 近似解を y とおいたとき $\|Ay - b\|$ が一定の値に収束したとき解が収束したとみなした.

このとき, 図-3 に $x_1 = x_2 = 0$ km における鉛直方向における推定結果を示す. target が散乱解析に用いた Lamé 定数, estimation が散乱波動場から推定した結果となつて



(a) 推定結果 $[\tilde{\lambda}]$



(b) 推定結果 $[\tilde{\mu}]$

図-3: $x_1 = x_2 = 0$ km での x_3 方向の逆散乱解析結果

いる. この結果から, 揺らぎの大まかな揺らぎの位置, 大きさを推定することが可能であることがわかる.

4 むすび

本論文では, 揺らぎを持つ半無限弾性波動場において領域積分方程式を用いた逆散乱解析手法の展開を行った. ここでは, Krylov 部分空間反復解法と FFT を組み合わせる手法を提示し, 半無限弾性波動場における逆散乱解析の可能性を示した. 結果に示したものは一例であるが, 数値を変えた際にまだ若干の欠点も見ることができるとある程度の大きさ, 位置を捉えることができた. 今後は, 誤差を修正するため正則化を行なうことが課題となる.

5 参考文献

- 1) 藤野清次, 張紹良: 反復解法の数理, 応用数値計算ライブラリー, 朝倉書店, 1996.
- 2) 東平光生, 岩崎健太郎, 小林遼, 木内拓: 領域積分方程式を用いた弾性波動場の散乱および逆散乱解析手法の展開, 応用力学論文集, Vol.10, pp.17-26, 2007
- 3) 東平光生: 領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ半弾性波動場の解析手法, 土木学会論文集, Vol.64, No.2, 2008