半無限弾性波動場の散乱解析プログラムの並列化手法とその効果の検討

東京理科大学 学生会員 ○小林 遼
東京理科大学 正会員 東平光生

1 はじめに

波動方程式を計算機上で解くことは，地震波動解析など土木工学において重要な意味を持つ．本研究では，波動解析の一つの手法として，媒質の揺らぎと波動場を結びつける利点をもつ領域積分方程式に対して Fourier 変換を施し波数領域の方程式にし，FFT と Krylov 部分空間反復解法 [1] を組み合わせる手法を提案してきた [2]．本論文は，領域積分方程式を用いた散乱解析で問題となる膨大な演算時間を，並列計算手法 MPI[3] を適用させることで短縮化を図る．

2 解析手法の概要

2.1 問題の定義

ここでは**図–1** に示すように鉛直下向きに x_3 軸をとり，$x_3 = 0$ km での $x_1 - x_2$ 平面を地表面とする．このとき，点震源で発生した入射波が媒質の揺らぎに照射し，散乱波を生じる問題を扱う．そして，全波動場が既知のとき，Lamé 定数の変動部分を推定する逆散乱問題を扱う．弾性波動場は 3 次元で，媒質の Lamé 定数は次のように表せると仮定する．

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda_b + \tilde{\lambda}(\vec{x})$$
$$\mu(\vec{x}) = \mu_b + \tilde{\mu}(\vec{x}), \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3_+) \qquad (1)$$

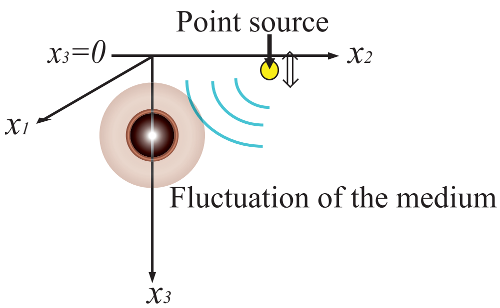
ここに，λ，μ は Lamé 定数であり，添え字の b は Lamé の定数が一定の部分を表す．また，$\tilde{\lambda}$ および $\tilde{\mu}$ は Lamé 定数の変動部分を表す．すなわちここでは，散乱波動場から $\tilde{\lambda}$，$\tilde{\mu}$ を推定する．

2.2 波領域数における領域積分方程式

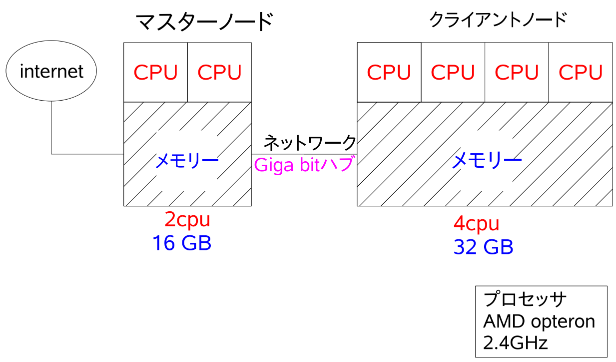
媒質の揺らぎを支配方程式の非同次項とみなし領域積分方程式を構成する．そして，領域積分方程式を境界条件を考慮した Fourier 変換 (以降の議論では一般化 Fourier 変換 [4] と呼ぶ) を適用することで次式を得る [4]．

$$\hat{v}_i(\vec{\xi}) = -\hat{h}(\vec{\xi})\mathscr{U}_{ij}N_{jk}(\vec{x})\mathscr{U}^{-1}_{kl}\hat{f}_l(\vec{\xi})$$
$$-\hat{h}(\vec{\xi})\mathscr{U}_{ij}N_{jk}(\vec{x})\mathscr{U}^{-1}_{kl}\hat{v}_l(\vec{\xi}) \qquad (2)$$

ここに，$\hat{v}_i$ は散乱波，$\hat{h}$ は波数領域の Green 関数，$\hat{f}$ は入射波，$\hat{q}_j$，N_{jk} は媒質の揺らぎとその勾配に関係した関数である．$\mathscr{U}$ は一般化 Fourier 変換の演算子，$\mathscr{U}^{-1}$ は一般化 Fourier 逆変換の演算子である．また，$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ は空間領域のベクトル，$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3_+$ は波数領域のベクトルであり，x_3，ξ_3 は正の値のみを持つ．さらに，$\mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ は 3 次元半無限空間を表す．



図– 1: 解析モデル



図– 2: 高速並列計算機の環境

3 並列計算手法 MPI の適用

3.1 プログラムの構成

本研究で扱う高速計算機環境は**図–2** のようになっている．散乱解析プログラムは大きく分けて，

(1) 入力データ設定
(2) 外力項の計算
(3) 散乱波を求める計算

キーワード：領域積分方程式，一般化 Fourier 変換，Fourier 積分変換，Krylov 部分空間反復解法，FFT，MPI
〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4075)

(4) 結果の出力

の４つのパートから構成されている．特に (3) では，反復解法の中に一般化フーリエ変換・逆変換の計算を含ませて散乱波を求めている．この時全体の演算時間に対して，フーリエ変換部分では 10.84 %，フーリエ逆変換部分では 87.78 %もの演算時間を浪費し，その他の部分では演算時間はほぼ費やさない結果を得た．

3.2 MPI の適用箇所

上記で記した一般化フーリエ変換・逆変換箇所には 2 次元 FFT を含んだ 4 重ループが存在する．また両者合わせて演算時間の大半を占めていることから，この部分をホットスポットと断定できる．従って並列化することによりパフォーマンスを向上させられる可能性がある．今回は外側のループに並列化を施した．これは通信回数を極力減らすことで立ち上げ回数も少なくなることから，通信時間の減少が見込めるためである．

4 数値計算結果

本論文では，前段階としてあるサンプル関数に一般化フーリエ変換・逆変換を施し上記の並列化を適用することで，元の関数に復元されるかを確かめる．与える入射波 $f(\vec{x})$ を

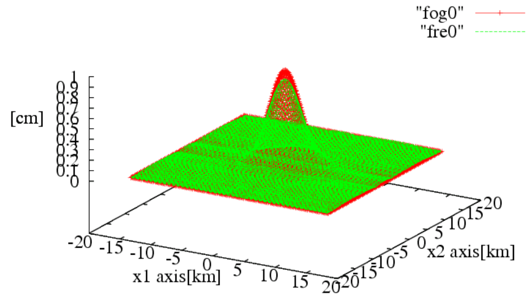
$$f(\vec{x}) = \exp(-0.1|\vec{x} - \vec{x}_0|^2)$$

と表現する．揺らぎの中心座標 $\vec{x}_0$ は，$\vec{x}_0 = (0, 0, 0)[km]$ とする．また x_1, x_2, x_3 軸の解像度はそれぞれ目標とする数値の 1/2 で行なった．

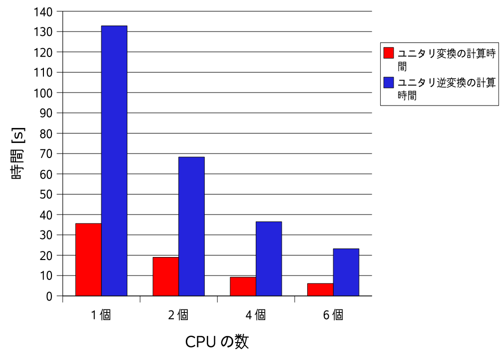
このときの出力結果を**図–3** に示す．ここで fog0 は与えられた関数，fre0 は与えられた関数にフーリエ変換した後，逆変換して関数を元に戻したものである．この結果から多少の誤差が見られた．並列化前の出力結果との比較から，この原因は並列化によるものではなく解像度を下げたことによるものであった．また，**図–4** の演算時間の効果を見てわかる通り，並列化を施した箇所については良好に時間短縮効果が得られた．しかし全体の時間短縮効果については，CPU の数に反比例して時間短縮されなかった．これは演算時間の中に CPU 間の通信に時間を割いたことに起因するものであり，CPU 数が増える毎に時間がかかるためである．しかし並列化することによる時間削減の効果は十分得られたことがわかる．

5 むすび

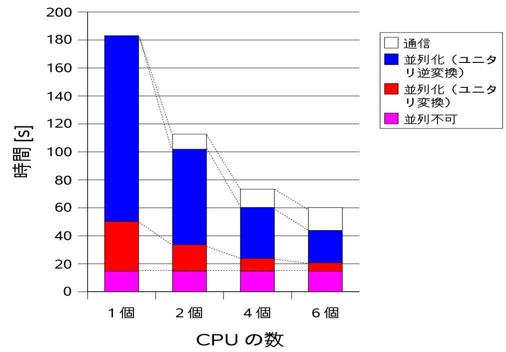
本論文では，半無限弾性波動場の散乱解析プログラムに MPI を施すことで時間削減を図った．並列化を施した箇所については CPU 数に応じた時間削減効果を示すことができたが，全体的に見ると通信時間の問題など改善すべき点がまだ残されている．今後は更なる短縮効果を目指すとともに，解像度を目標値に設定し散乱解析を行なうことが課題である．



図– 3: 並列化適用した際の関数比較



(a) 一般化フーリエ変換・逆変換の時間推移



(b) 全体の計算時間の推移

図– 4: CPU 数に対する時間比較

6 参考文献

1) 藤野清次，張紹良: 反復解法の数理，応用数値計算ライブラリー，朝倉書店，1996.
2) 東平光生，岩崎健太郎，小林遼，木内拓: 領域積分方程式を用いた弾性波動場の散乱および逆散乱解析手法の展開，応用力学論文集，Vol.10, pp.17-26, 2007
3) http://accc.riken.jp/hpc/training/text.html
4) 東平光生: 領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ半弾性波動場の解析手法，土木学会論文集，Vol.64, No.2, 2008