

領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ半無限弾性波動場の散乱解析

東京理科大学 学生会員 ○高岸智紘
東京理科大学 正会員 東平光生

1 はじめに

波動方程式を計算機上で解くことは、地震波動解析などの分野で土木工学とも深く関わっている。本研究では、波動解析の一つの手法として、媒質の揺らぎと波動場を結びつける利点をもつ領域積分方程式に対して Fourier 変換を施し波数領域の方程式にし、FFT と Krylov 部分空間反復解法¹⁾を組み合わせる手法を提案してきた²⁾。

本論文では、領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ半無限弾性波動場における散乱解析の手法の概要と数値計算結果を示す。

2 解析手法の概要

2.1 問題の定義

ここでは解析モデルを図-1のように示す。解析モデルは揺らぎを持つ半無限弾性波動場である。ただし、媒質の揺らぎは Lamé 定数の変動部分で次のように表せる。

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{x}) &= \lambda_0 + \tilde{\lambda}(\vec{x}) \\ \mu(\vec{x}) &= \mu_0 + \tilde{\mu}(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}_+^3)\end{aligned}\quad (1)$$

添え字の 0 は Lamé の定数が一定の部分を表す。また、 $\tilde{\lambda}$ および $\tilde{\mu}$ は Lamé 定数の変動部分を表す。さらに、 $\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ は 3 次元半無限空間を表す。図-1 に示すように、鉛直下向きに x_3 軸をとり、 $x_3 = 0$ km での $x_1 - x_2$ 平面を地表面とする。このとき、点震源で発生した入射波を媒質の揺らぎに照射し、散乱波を発生させる問題を扱う。揺らぎを持つ半無限弾性波動場の全波動場は次の積分方程式で表現することが可能である³⁾。

$$u_i(\vec{x}) = g_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_s) q_j - \int_{\mathbb{R}_+^3} g_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) N_{jk}(\vec{y}) u_k(\vec{y}) d\vec{y} \quad (2)$$

ここで、 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3$ は観測点の位置ベクトル、 $\vec{x}_s$ は加振点の位置、 u は全波動場、 g_{ij} は Green 関数、 q_j は加振力ベクトルの成分、 N_{jk} は弾性定数の変動部分で表される関数である。本論文では領域積分方程式を波数領域に変換し、そこに Krylov 部分空間反復解法を適用する。

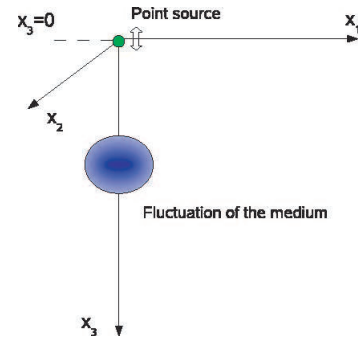


図-1: 解析モデル

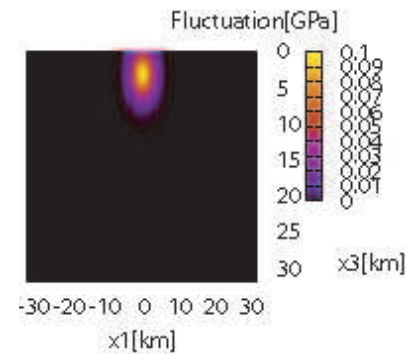


図-2: Lamé 定数の空間変動分布 ($x_2 = 0$ km)

2.2 波数領域における領域積分方程式

領域積分方程式、式 (2) を散乱波

$$v_i(\vec{x}) = u_i(\vec{x}) - g_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_s) q_j \quad (3)$$

に関するものを書き換え、境界条件を考慮した Fourier 変換 (以降の議論では一般化 Fourier 変換³⁾と呼ぶ) を適用することで次式を得る³⁾。

$$\begin{aligned}\hat{v}_i(\vec{\xi}) &= -\hat{h}(\vec{\xi}) \mathcal{U}_{ij} N_{jk}(\vec{x}) \mathcal{U}_{kl}^{-1} \hat{f}_l(\vec{\xi}) \\ &\quad - \hat{h}(\vec{\xi}) \mathcal{U}_{ij} N_{jk}(\vec{x}) \mathcal{U}_{kl}^{-1} \hat{v}_l(\vec{\xi})\end{aligned}\quad (4)$$

ここに、 $\hat{v}_i$ は散乱波、 $\hat{h}$ は波数領域の Green 関数、 $\hat{f}$ は入射波、 $\hat{q}_j$ は媒質の揺らぎとその勾配に関係した関数である。 $\mathcal{U}$ は一般化 Fourier 変換の演算子、 $\mathcal{U}^{-1}$ は一般化 Fourier 逆変換の演算子である。また、 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}_+^3$ は波数領域のベクトルであり、 x_3, ξ_3 は正の値のみを持つ。

キーワード：領域積分方程式，一般化 Fourier 変換，Fourier 積分変換，Krylov 部分空間反復解法，FFT

〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4075)

3 数値計算結果

ここでは、入射波を図-2に示す媒質の揺らぎに照射し、散乱波を生じる問題を考える。弾性定数のバックグラウンドは、 $\lambda_0 = 4\text{GPa}$, $\mu_0 = 2\text{GPa}$, $\rho = 2\text{g/cm}^3$ とする。すなわち、このときのP波の速度は 2km/s , S波の速度は 1km/s である。また、波動場の振動数を 1Hz とする。したがって、バックグラウンドのP波とS波の波数はそれぞれ、 $k_L = 3.14\text{km}^{-1}$ および $k_T = 6.28\text{km}^{-1}$ であり、Rayleigh波の特性方程式より、Rayleigh波の波数は $\xi_R = 6.737\text{km}^{-1}$ である。また、弾性定数の変動部分は次のように設定している。

$$\tilde{\lambda}(\vec{x}) = 0.1 \exp(-0.1 |\vec{x} - \vec{x}_0|^2) \quad (5)$$

$$\tilde{\mu}(\vec{x}) = 0.1 \exp(-0.1 |\vec{x} - \vec{x}_0|^2) \quad (6)$$

ここで、 $x_0 = (0, 0, 3)$ であり、揺らぎの中心座標である。

このとき、図-3に地表面 ($x_3 = 0$) における水平方向の散乱波の解析結果を示す。波が同心円上に広がっている様子が分かる。これは、揺らぎが球対称で原点の直下に位置しているためである。

また、図-4では鉛直方向の散乱波の解析結果を示している。揺らぎを通過することで、波の進行方向に散乱波の変位が大きいことが見て取れる。また、地表面においても大きくなっていることが見て取れる。これは、自由表面での表面波の影響と考えられる。深度 10km 以下から振幅の大きな値が出始めているが、これは鉛直成分の積分計算による誤差と考えられる。図-5はスペクトルの解析結果である。地表面では、Rayleigh波 (波数 $\xi = 6.737$) が卓越していることがわかる。これより、図-4の表面波が確認できた。

4 むすび

本論文では、揺らぎを持つ半無限弾性波動場において領域積分方程式を用いた散乱解析手法の概要を示した。ここでは、Krylov部分空間反復解法と一般化Fourier変換を組み合わせた手法を提示し、半無限弾性波動場における散乱解析の解析結果を示した。結果に示したものは一例であるが、他の解析でも浅い部分ではおおむね良い結果が得られた。今後の課題は深度 10km を越えた場合の一般化Fourier変換の精度低下を克服することである。

5 参考文献

- 1) 藤野清次, 張紹良: 反復解法の数理, 応用数値計算ライブラリー, 朝倉書店, 1996.
- 2) 東平光生, 岩崎健太郎, 小林遼, 木内拓: 領域積分方程式を用いた弾性波動場の散乱および逆散乱解析手法の展開, 応用力学論文集, Vol.10, pp.17-26, 2007
- 3) 東平光生: 領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ半弾

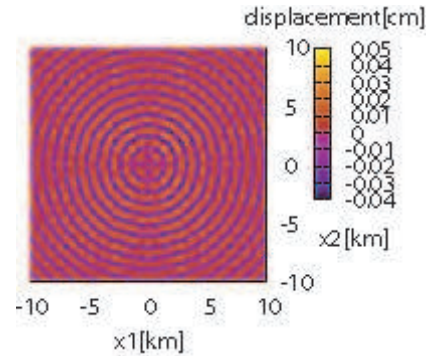


図-3: 解析結果 [水平断面の散乱波の変位]

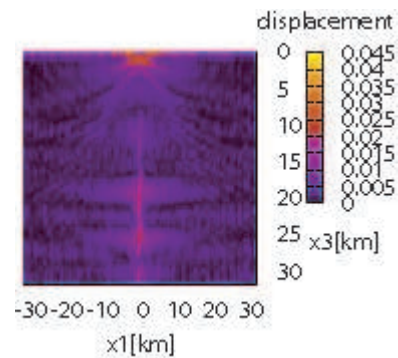


図-4: 解析結果 [鉛直断面の散乱波の変位]

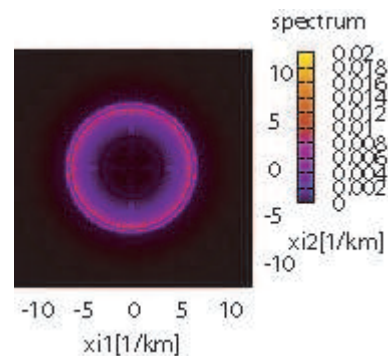


図-5: 解析結果 [$x_3 = 0$ におけるスペクトル]

性波動場の解析手法, 土木学会論文集, Vol.64, No.2, 2008