

全無限弾性波動場における領域積分方程式を用いた多重散乱解析

東京理科大学

(株) システムインテグレータ

東京理科大学

学生会員 ○木内 拓

正会員 岩崎健太郎

正会員 東平光生

1 はじめに

近年、地震防災の観点より地盤内を数値シミュレーションすることの重要性は増しているといえる。本研究では、波動解析の一つの手法として媒質の揺らぎと波動場を直接結びつけることができる領域積分方程式にFFTとKrylov部分空間反復解法¹⁾を組み合わせる手法を提案してきた²⁾。本論文は、複数の揺らぎが存在する弾性波動場において逆散乱解析の実現可能性の検討を行なう。

2 解析手法の概要

2.1 問題の定義

本論文は、図-1(a)に示すように平面波が不均質領域で乱され、散乱波が生成される状況を考える。そして、全波動場が既知のとき、Lamé定数の変動部分を推定する問題を扱う。弾性波動場は3次元で、媒質のLamé定数は次のように表せると仮定する。

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{x}) &= \lambda_0 + \tilde{\lambda}(\vec{x}) \\ \mu(\vec{x}) &= \mu_0 + \tilde{\mu}(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)\end{aligned}\quad (1)$$

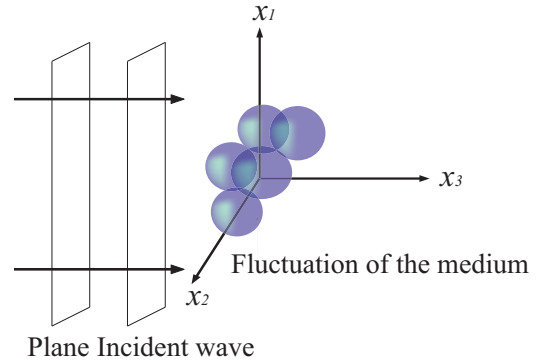
ここに λ_0 および μ_0 はLamé定数が空間的に一定の部分でバックグラウンドのLamé定数と呼ぶ。これに対し、 $\tilde{\lambda}(\vec{x})$ および $\tilde{\mu}(\vec{x})$ はLamé定数の変動部分である。

2.2 逆散乱問題における領域積分方程式の定式化

媒質の揺らぎを支配方程式の非同次項とみなし領域積分方程式を構成する。そして、領域積分方程式をFourier変換することで次式を得る²⁾。

$$\begin{aligned}\hat{v}_i(\vec{\xi}) &= -\hat{h}_{ij}(\vec{\xi})\hat{q}_j(\vec{\xi} - \vec{\xi}_p) \\ &\quad -\hat{h}_{ij}(\vec{\xi})\mathcal{F}N_{jk}(\vec{x})\mathcal{F}^{-1}v_k(\vec{\xi})\end{aligned}\quad (2)$$

ここに、 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ は3次元空間領域の点、 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ は3次元波数領域の点で添字により座標成分を表す。また、 $\hat{v}_i$ は散乱波であり $v_i(\vec{x}) = u_i(\vec{x}) - f_i(\vec{x})$ と定義する。 u_i は全波動場、 f_i は入射波、 $\hat{h}_{ij}$ はGreen関数、 $\hat{q}_j$ と N_{jk} はLamé定数の変動部分から構成される関数、 $\vec{\xi}_p$ は入射波数ベクトル、 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ はFourier変換、逆変換である。



(a) 解析モデル

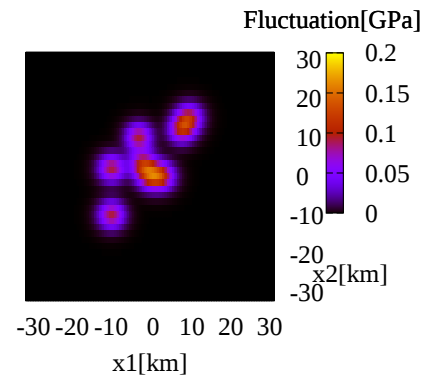
(b) Lamé定数の空間変動分布 ($x_3 = 0$ km)

図-1: 数値計算に用いるモデルケース

式(2)の両辺に $-\hat{h}_{ji}^{-1}$ とシフト演算子 $S_{\xi_p} = \mathcal{F} \exp(-i\vec{x} \cdot \vec{\xi}_p) \mathcal{F}^{-1}$ を乗じることで次式を得る。

$$S_{\xi_p} \hat{\gamma}_i(\vec{\xi}) = \hat{q}_i(\vec{\xi}) + \mathcal{F} \exp(-i\vec{x} \cdot \vec{\xi}_p) M_{ij} \mathcal{F}^{-1} \hat{q}_j(\vec{\xi}) \quad (3)$$

逆散乱解析では、全散乱波動場を既知量として出発する。従って、式(3)の左辺は既知量となる。物理的には、 γ_i は散乱波動場をGreen関数で除したものとなる。この変形を通して、式(3)は $\hat{q}$ を求めるための方程式となり、ここからLamé定数の変動を推定することが可能になる。式(3)に反復計算を適用することで $\hat{q}$ が算出でき、 $\hat{q}_i$ から次のよ

キーワード：領域積分方程式，多重散乱，Fourier積分変換，Krylov部分空間反復解法，FFT

〒278-8510 千葉県野田市山崎2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4075)

うに Lamé 定数の空間変動の Fourier 変換を算定する.

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(\vec{\xi}) &= \frac{\hat{q}_1(\vec{\xi})}{i\xi_1 a k_L^2} = \frac{\hat{q}_2(\vec{\xi})}{i\xi_2 a k_L^2} \\ \hat{\mu}(\vec{\xi}) &= \frac{\hat{q}_3(\vec{\xi})}{2iak_L^2(\xi_3 + k_L)} - \frac{\hat{\lambda}(\vec{\xi})}{2}\end{aligned}\quad (4)$$

最終的に式(4)で得た $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ を Fourier 変換することで Lamé 定数の変動部分を推定することができる. ただし, ここでは入射波は x_3 方向に進行する平面 P 波を考え $f_i(\vec{x}) = \partial_i a \exp(ik_L x_3)$ としている. ここで, a は k_L は平面入射波のポテンシャルの振幅, P 波の波数である.

3 数値計算結果

図-1(a) に示すように x_3 軸に沿って平面 P 波が伝播し, 図-1(b) の不均質領域で波動が乱される問題を扱う. 平面入射 P 波のポテンシャルの振幅 a は $1.0 \times 10^{-5} \text{ km}^2$ とした. Lamé 定数のバックグラウンドは, $\lambda_0 = 4 \text{ GPa}$, $\mu_0 = 2 \text{ GPa}$, $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$ とする. すなわち, このときの P 波の速度は 2 km/s , S 波の速度は 1 km/s である. また, 波動場の振動数を 1 Hz とする. 収束条件は, 解くべき連立方程式を $Ax = b$ としたとき, 近似解 y が $\|Ay - b\| \leq 0.02\|b\|$ を満たしたときとした.

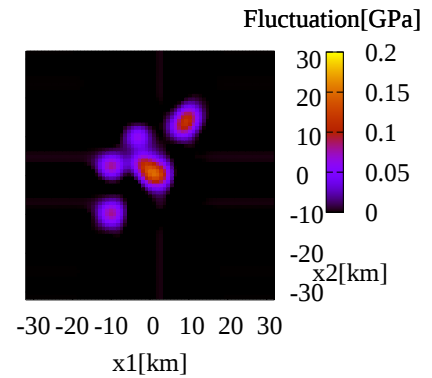
このときの推定結果を図-2 に示す. 図-2(a) が $\hat{\lambda}$, 図-2(b) が $\hat{\mu}$ の推定結果である. これらの結果より非常に精度良く Lamé 定数の変動部分のある位置, 形状の推定ができることがわかる.

次に, 図-3 に, 縦軸に相対残差 $\epsilon = \frac{\|Ay - b\|}{\|b\|}$, 横軸に反復回数をとった収束グラフを示す. Bi-CGSTAB 法を用いたときの数値計算に要した時間は, AMD opteron のプロセッサを搭載した PC(4CPU 並列) で 30 min であった. ただし, 反復回数は 18 回で打ち切っている. また, FFT には acml ライブラリ³⁾ を使用し, FFT は 256^3 で行った.

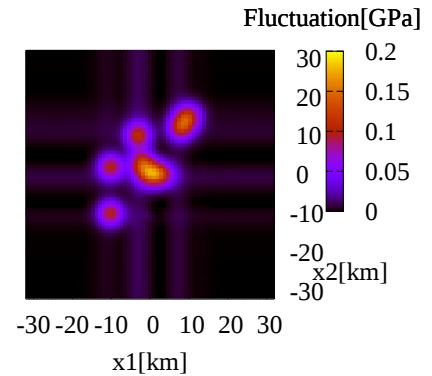
4 むすび

本論文では, Fourier 積分変換された波数領域の領域積分方程式に対し, FFT と Krylov 部分空間反復解法を適用し, 揺らぎを持つ波動場における逆散乱解析のための手法を示した. 逆散乱解析の定式化においては, 全波動場が既知であることを仮定し, 領域積分方程式から Lamé 定数の変動部分を分離した. さらに解くべき方程式を正則化するためにシフト演算子を用いて変形し, 反復計算を適用することで, Lamé 定数の変動部分を算出した. 結果として, 複数の揺らぎをもつ弾性波動場における多重散乱解析, それに対する逆散乱解析が可能であることがわかった.

今後の課題は, BOX 関数のような急激に増減するようなものを扱っていくこと, 更に限られた観測条件のもとで全波動場を推定し逆散乱解析を行うことである.



(a) Lamé 定数 $\hat{\lambda}$ の変動部の空間分布



(b) Lamé 定数 $\hat{\mu}$ の変動部の空間分布

図-2: Lamé 定数の推定結果 ($x_3 = 0 \text{ km}$)

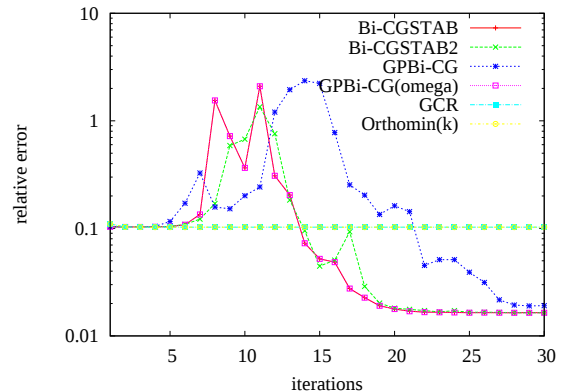


図-3: 反復回数と相対残差の関係

5 参考文献

- 1) 藤野清次, 張紹良: 反復解法の数理, 応用数値計算ライブラリー, 朝倉書店, 1996.
- 2) 東平光生, 岩崎健太郎, 小林遼, 木内拓: 領域積分方程式を用いた弾性波動場の散乱および逆散乱解析手法の展開, 応用力学論文集, Vol.10, pp.17-26, 2007
- 3) <http://www.softtek.co.jp/SPG/Pgi/TIPS/acml/html>