可動支点および伸縮床を有する柔せん断構造の固有周期と固有振動モード

崇城大学　工学部エコデザイン学科　正会員○片山拓朗*
熊本大学　大学院自然科学研究科　正会員　山尾敏孝

１．はじめに

一般的な地震動の性質として，約 1 秒を超える周期領域において，構造物の水平固有周期を増加させると，構造物に作用する地震力は減少する．

ここでは，主に柱と梁の骨組で地震力に抵抗する中高層せん断構造において，一部の柱を可動支点で支持し（これを可動柱と呼ぶ），それ以外の柱を基部に固定し（これを固定柱と呼ぶ），且つ下層部の固定柱と可動柱の間の全ての床を伸縮可能とすることにより，従来型せん断構造に比較して長周期の水平振動モードを有する柔せん断構造を提案し[1)]，振動理論と数値計算によって明らかになった柔せん断構造の固有振動モードの周期と形状を報告する．

２．生物用通路要素付ブロック構造体の構造的特徴

図 1 に，著者が提案する可動支点と伸縮床を用いた柔せん断構造の基本構造を説明する最も簡単な振動モデルを示す．この振動モデルは，柱が基礎に固定された固定側構造と柱が基礎上の可動支点で支持された可動側構造および二つの構造の最上部を結合する結合床で構成する．固定側構造と可動側構造の階数はそれぞれ n 階とし，各階の床は梁を兼ねるものとし且つ剛体とする．結合床から下の各階には，固定側構造と可動側構造の相対水平変位を拘束しない伸縮床を設置する．

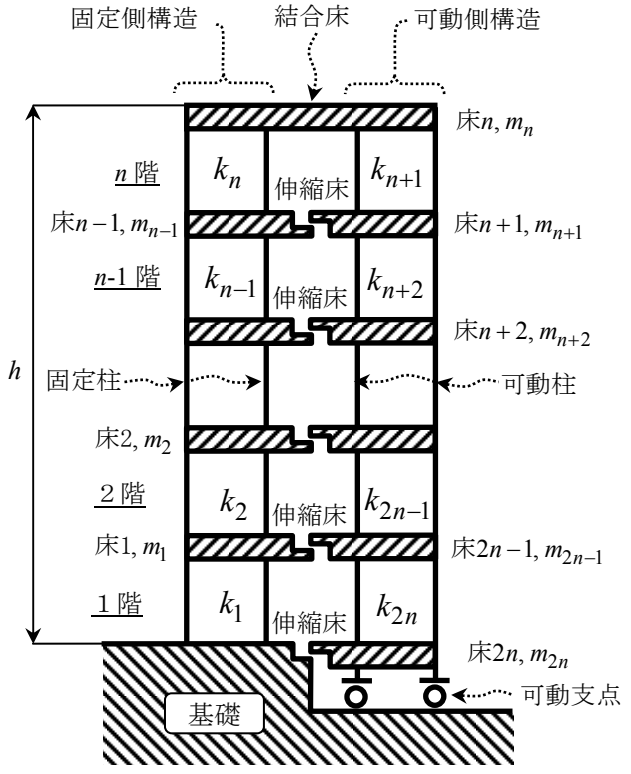

図１　柔せん断構造の振動モデル

固定側構造と可動側構造の床を下から順に，それぞれ床 1，床 2，・・・，床 n と床 $2n$，床 $2n$-1，・・・床 n と呼ぶ．床 n は両構造に共通な結合床であり，床 $2n$ は可動支点上の床である．床 i とこれに結合されている柱の質量を m_i とする．

柔せん断構造の各階の水平剛性はせん断バネでモデル化する．固定側構造と可動側構造のせん断バネ定数を，下から順にそれぞれ $k_1,k_2,\cdots,k_n$ と $k_{2n},k_{2n-1},\cdots,k_{n+1}$ とする．

3. 固有振動理論

3.1　非減衰系の固有値問題

可動支点の摩擦を無視し，図 1 の振動モデルの固有円振動数と対応する固有ベクトルをそれぞれ ω と $\boldsymbol{\varphi}$ とすると，それらは次の固有値問題の解として得られる．

$$\left(K-\omega^2 M\right)\boldsymbol{\varphi}=0 \tag{1}$$

ここに，K と M はそれぞれ式(2)と式(3)に示す $2n$ 次 3 重対角剛性行列と $2n$ 次対角質量行列であり，$\boldsymbol{\varphi}$ は式(4)に示す $2n$ 次ベクトルである．また，式(4)の ϕ_i は床 i の水平振幅である．

$$K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -k_{2n-1} & k_{2n-1}+k_{2n} & -k_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & -k_{2n} & k_{2n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$M=\mathrm{diagonal}\left[m_1,m_2,\cdots,m_{2n-1},m_{2n}\right] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}=\left[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{2n-1},\phi_{2n}\right] \tag{4}$$

せん断バネ定数 $k_1,k_2,\cdots,k_{2n}$ と質量 $m_1,m_2,\cdots,m_{2n}$ の代表値をそれぞれ k_0 と m_0 とする．せん断バネ k_0 と質量 m_0 からなる 1 自由度せん断振動要素の円振動数は $\sqrt{m_0/k_0}$ となるので，これを ω_0 と表し，振動モデルを構成するせん断振動要素の代表円振動数と呼ぶ．また，k_i と k_0 の比，m_i と m_0 の比および ω と ω_0 の比をそれぞれ α_i，β_i および

キーワード：柔せん断構造，可動支点，伸縮床，固有周期，固有振動モード
連絡先（*熊本市池田 4 丁目 22 番 1 号，TEL:096-326-3792，E-mail:katayama@eco.sojo-u.ac.jp）

$\sqrt{\lambda}$ とすると，式(1)は次の固有値問題に変換される．

$$\left(A-\lambda B\right)\boldsymbol{\varphi}=0 \tag{5}$$

ここに， $A=K/k_0$ と $B=M/m_0$ はそれぞれ式(7)と式(8)に示す $2n$ 次 3 重対角行列と $2n$ 次対角行列とする．

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & -\alpha_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\alpha_{2n-1} & \alpha_{2n-1}+\alpha_{2n} & -\alpha_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{2n} & \alpha_{2n} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$B=\mathrm{diagonal}\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{2n-1},\beta_{2n}\right] \tag{7}$$

また，ω に対応する固有周期を $T=2\pi/\omega$ とし，ω_0 に対応するせん断振動要素の代表周期を $T_0=2\pi/\omega_0$ とすると，T と T_0 の比は次式となる．

$$\frac{T}{T_0}=\frac{\omega_0}{\omega}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tag{8}$$

3.2 固有周期と固有ベクトル

一般に，式(5)の解は逆べき乗法などの数値計算法により求められるが，$\alpha_i=\beta_i=1\left(1\le i\le 2n\right)$ の条件に限って，次式の解析解が存在する．

$$\lambda_i=4\sin^2\left(\frac{2i-1}{4\times 2n+2}\pi\right),\quad 1\le i\le 2n \tag{9}$$

$$\phi_{j,i}=\frac{2}{\sqrt{2\times 2n+1}}\sin\left(\frac{2i-1}{2\times 2n+1}j\pi\right),\quad 1\le i,j\le 2n \tag{10}$$

ここに，λ_i は i 次の固有値であり，$\phi_{j,i}$ は i 次固有ベクトル $\boldsymbol{\varphi}_i$ の床 j の振幅を表す．i 次の固有周期を T_i とすると，T_i は $T_i=T_0/\sqrt{\lambda_i}$ と表される．

同様に，n 個の質量 m_0 とせん断バネ定数 k_0 で構成されたすなわち周期が T_0 である n 個のせん断振動要素で構成された通常型せん断構造の固有周期 $\tilde{T}_i$ とすると，$\tilde{T}_i$ は $\tilde{T}_i=T_0/\sqrt{\tilde{\lambda}_i}$ と表される．$\tilde{\lambda}_i$ は次式となる．

$$\tilde{\lambda}_i=4\sin^2\left(\frac{2i-1}{4\times n+2}\pi\right),\quad 1\le i\le n \tag{11}$$

式(9)と式(11)を用いると，T_i と $\tilde{T}_i$ の比は次のように近似される．ただし，$i\ll n$ とする．

$$\frac{T_i}{\tilde{T}_i}=\frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_i}}{\sqrt{\lambda_i}}\approx\frac{4n+1}{2n+1} \tag{12}$$

式(12)より，振動モデルの階数が同じで，振動モデルを構成するせん断振動要素の周期が同じであれば，提案の柔せん断構造の固有周期は，従来型せん断構造の固有周期の約 2 倍となることがわかる．

4. 数値計算

図 2 は，$\left(\alpha_i=\beta_i=1\right)$ と $\left(\alpha_i=1,\beta_n=3,\beta_{2n}=2,\beta_{i\ne n,2n}=1\right)$ の二つの条件について，図 1 の振動モデルの 1 次固有周期と階数 n の関係を調べたものである． 前者の条件の固有周期は式(9)によって計算し，後者の条件の固有周期は式(5)の固有値問題をハウスホルダー＋QR 法で解いて，その結果を式(8)で整理したものである．比較のために式(11)で計算した通常型せん断構造のそれも併記する．図 2 より，提案の柔せん断構造の一次固有周期は，せん断振動要素の周期が一定であれば，階数 n に比例して増加することが分かる．$\beta_n=3,\beta_{2n}=2$ の条件は $\beta_n=\beta_{2n}=1$ の条件に比べて若干周期が大きいことが分かる．2 次以降の固有周期についても同様の性質が見られた．

図 3 は，$\left(n=10,\alpha_i=\beta_i=1\right)$ の条件において，式(10)を用いて計算した 1 次と 2 次と 3 次の固有振動モードである．1 次モードは台形，2 次モードは下部がくびれた細長いコップ，3 次モードは中間部がくびれた花瓶の形であることが分かる．これらの固有振動モードに共通な特徴は，固定側構造と可動側構造の水平相対変位が大きいことである．

4．まとめ

提案の柔せん断構造体は，従来の構造に比べて 2 倍の長さの周期を持ち，固定側構造と可動側構造の大きな相対水平変位を特徴とする振動モードを有することが分かった．

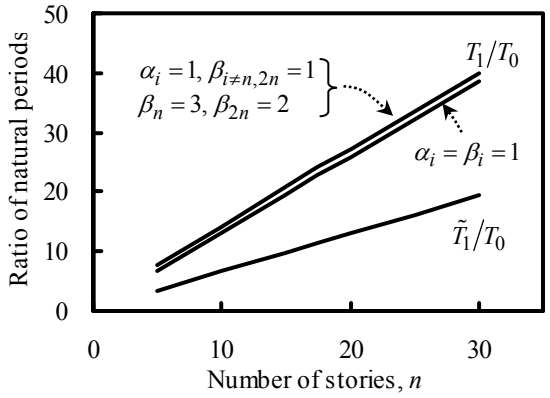

図 2 1 次固有周期と階数 n の関係

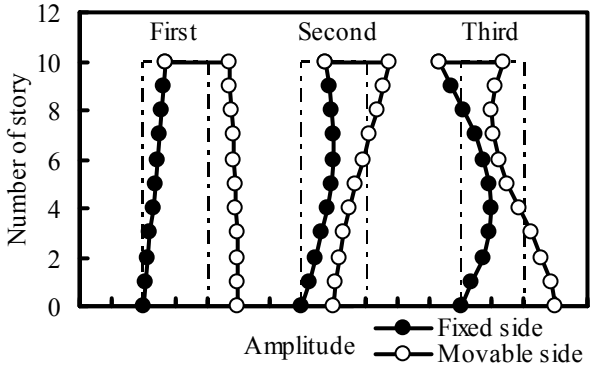

図 3 固有振動モードの形状

参考文献

1) 片山拓朗，岡林拓也，山尾敏孝，折り曲がり片持ちせん断構造体の自由振動特性に関する実験的研究，H19 年度土木学会西部支部研究発表会，2008 年 3 月．