

有限要素法を用いた降積雪過程解析手法の構築

新潟大学大学院自然科学研究科
新潟大学工学部建設学科

学生員 小川 徹
正会員 阿部 和久

1. はじめに

積雪から構造物に作用する荷重には積雪の自重のみならず、圧密に起因して発生する沈降力も含まれる。特に沈降力は自重を大幅に上回る可能性もあり、設計上適切な評価が重要となる。

本研究の主な目的は、有限要素法を用いた降積雪過程解析手法の構築である。降積雪過程をモデル化し、当研究室で開発した積雪変形解析手法¹⁾にそれを実装することで降積雪過程プログラムを構成した。その上で時間経過に伴う積雪形状の変化、圧力 p の分布、そしてはりなどの構造物に作用する沈降荷重を求め、その妥当性を検証していく。

2. 積雪変形解析手法

(1) VOF 法

積雪の大変形解析には、VOF (Volume of Fluid) 法により積雪領域を定義する Euler 記法を用いる。そのために、空間固定の要素内の積雪占有率を表す VOF 関数 ψ ($0 \leq \psi \leq 1$) を定義する。なお、中間値をとる要素には積雪面が含まれる。積雪領域の変形は次式に示す ψ の移流によって記述される。なお、移流計算には数値拡散を抑制する目的で CIP 法²⁾を用いる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (1)$$

(2) 有限要素方程式

積雪は引張変形時に等体積変形する。そのため、変位速度 $\{\mathbf{v}\}$ と圧力 $\{\mathbf{p}\}$ を変数とした混合型有限要素法により離散化する。

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]\{\mathbf{v}\} + [\bar{\mathbf{G}}]\{\mathbf{p}\} &= \frac{1}{\eta_0}\{\mathbf{f}\} \\ [\mathbf{G}]\{\mathbf{v}\} - [\mathbf{L}_p]\{\mathbf{p}\} &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $[\mathbf{K}], [\bar{\mathbf{G}}], [\mathbf{G}], [\mathbf{L}_p]$ は係数行列である。

3. 降雪過程の簡易モデル

降雪は風的作用により斜め下方に落下しつつ、拡散していく。そこで落下を移流、揺らぎを拡散として表現する。ただし、移流・拡散方程式の直接計算には時間を要する。ここでは時間短縮の目的で以下に述べる簡易モデルによることとする。

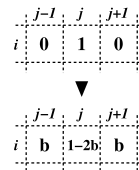


図 1 拡散過程

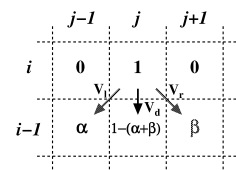


図 2 移流拡散過程

水平方向に連続した3要素 $(i, j-1), (i, j), (i, j+1)$ を考える。各要素の降雪濃度を 0, 1, 0 で与え、さらに雪が $\tan \theta = a$ の方向に降っているものとする。図1のような拡散パラメータ b を導入すると、要素 $(i-1, j)$ では、図2のように、降雪が移動していくこととなる。ここで、 $\alpha = a + b - 3ab, \beta = b(1-a)$ であり、 $\mathbf{V}_l, \mathbf{V}_d, \mathbf{V}_r$ は各要素から供給される降雪粒子の移動速度ベクトルである。

4. 積雪過程のモデル化

(1) 積雪面における変位速度の補正

今、要素 $(i-1, j)$ に積雪面が存在しており、その外向き法線ベクトルが $\mathbf{n}$ で与えられているものとする。このとき要素 $(i-1, j)$ は3要素 $(i, j-1), (i, j), (i, j+1)$ から降雪の供給を受ける。この場合要素 $(i-1, j)$ において $\mathbf{n}$ 方向に成長していく積雪速度 V_s は次式で表される。

$$\begin{aligned} V_s &= -\dot{h}\{\sqrt{2}\beta c_{i,j-1}\mathbf{s}_l + [1 - (\beta + \alpha)]c_{i,j}\mathbf{s}_d \\ &\quad + \sqrt{2}\alpha c_{i,j+1}\mathbf{s}_r\} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $c_{i,j-1}, c_{i,j}, c_{i,j+1}$ は3要素 $(i, j-1), (i, j), (i, j+1)$ の降雪速度、 $\mathbf{s}_l, \mathbf{s}_d, \mathbf{s}_r$ は前述の $\mathbf{V}_l, \mathbf{V}_d, \mathbf{V}_r$ に平行な単位ベクトルである。なお、積雪速度ベクトルは $\mathbf{v}_s = V_s \mathbf{n}$ で表され、算出された $\mathbf{v}_s$ を式(2)から算出された積雪変位速度 $\mathbf{v}$ に加え $\mathbf{v} + \mathbf{v}_s$ に補正することで、降積雪時における変位速度を与える。

(2) 密度 ρ の更新

界面を含んだある要素を考える。この要素 ΔV に対して積雪速度ベクトル $\mathbf{v}_s$ が与えられているものとする。当該要素に対して降雪供給がなされるとき、要素内密度 ρ に対して次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \mathbf{v}_s \cdot \nabla \psi \quad (4)$$

ここで、 ρ_0 は新雪密度である。さらに、界面に対する単位

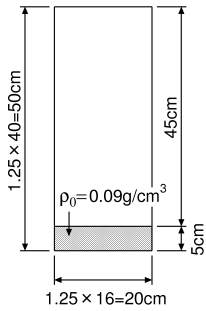


図3 解析例1

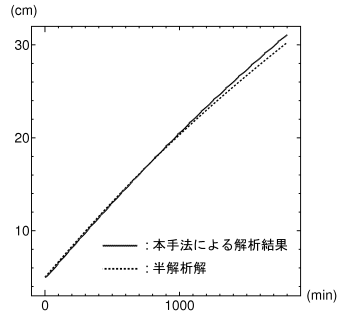


図4 積雪深時刻歴の比較

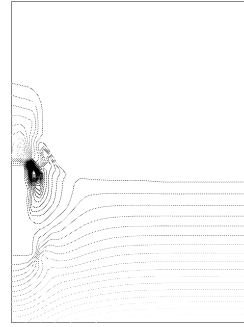


図7 圧力分布(90h後)

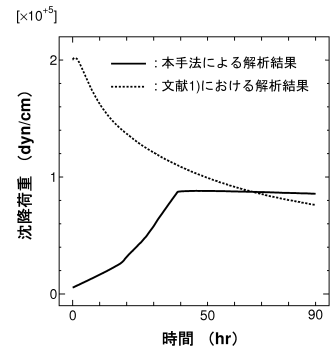


図8 沈降荷重の時刻歴

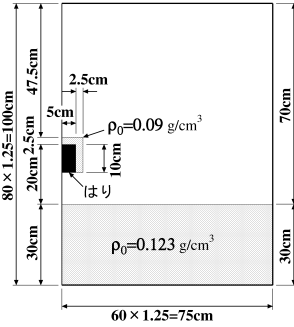


図5 解析例2

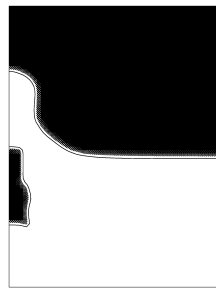


図6 積雪形状(90h後)

法線ベクトル $\mathbf{n}$ に関して $\mathbf{n} = -\nabla\psi/|\nabla\psi|$ を式(4)に代入し変形すると次式を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 V_s |\nabla \psi| \quad (5)$$

ここで式(5)を積雪変形時の密度の連続式と組み合わせることによって、次式を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho_0 V_s |\nabla \psi| \quad (6)$$

降雪が供給される界面要素に対しては式(6)を用いて密度更新を行う。

5. 解析例による検討

(1) 解析条件

降雪落下速度 $V = 1.0\text{m/s}$, 積雪速度 $\dot{h} = 1.0\text{cm/h}$, 新雪密度 $\rho_0 = 0.09\text{g/cm}^3$, 拡散パラメータ $b = 0.01\text{s}^{-1}$ とした。なお、以下の解析例では風は与えていない。なお正方形要素の一边は 1.25cm とし、時間増分は 60sec とした。

(2) 解析例1

図3に示す矩形領域の底部に初期積雪 5cm を設定し、降雪供給を行った。解析結果を図4に示す。図は積雪深の変化の様子を示したものである。比較のため当該問題の半解析解と合わせて図示した。積雪は降り積りつつ自重により圧密を受けていくため、積雪深の変化は時間に比例しない。時間経過と共に、多少の差異は認められるものの3%程度の精度が得られており、本手法の妥当性が確認できる。

(3) 解析例2

解析条件を図5に示す。解析領域は幅 75cm , 高さ 100cm の矩形領域に設定した。領域内にはりが設置されているが、

問題の対称性を考慮し、領域の右半分を解析領域とする。

またはりは1辺 10cm の正方形断面のものを採用し、底面から 50cm の位置に設置している。なお、積雪の成長には初期積雪の設定を要する。そのため、はりの上面および側面に対し初期密度 $\rho_0 = 0.09 (= \text{新雪密度})$, 厚さ 2.5cm の積雪を与えている。本解析においては約 40 時間降雪を与え、その後降雪のない状態で約 50 時間の圧密変形を進行させ、計 90 時間経過までの解析を行う。なお、この条件は阿部¹⁾の行った圧密解析と合わせて設定されており、はり上部での最終積雪質量が等しくなっている。その上ではり上部に作用する沈降荷重を算出し、得られた結果を文献1)における解析結果と比較する。

最終時刻における積雪形状を図6に示す。図中の白い部分はVOF関数値が1に近い領域を表しており、積雪領域に相当する。なお、図中の実線は積雪領域の境界線であり、 $\psi = 0.5$ の等高線を描画したものである。この図から、降雪ははりの下にはあまり供給されず、はりを覆うように雪が積まっていることが確認できる。また圧力 p の分布を図7に示す。圧縮力は積雪面からの深さに比例して大きくなるが、はり側面付近には引張力が集中して生じている。

次にはり上部に作用する沈降荷重の時刻歴を文献1)の解析結果とともに図8に示す。沈降荷重は降雪供給時は増え続け、供給終了後は徐々に減少している。なお、阿部の算出した沈降荷重は時間経過とともに減少し、最終時刻での沈降荷重¹⁾は約 $7.6 \times 10^4 \text{dyn/cm}$ の値をとっている。一方、今回の算出結果は最大で約 $9.0 \times 10^4 \text{dyn/cm}$, 最終時刻では約 $8.5 \times 10^4 \text{dyn/cm}$ であった。約 70 時間経過して以降は文献1)の算出結果を上回っており、降雪供給終了後の減少の仕方も小さい。その原因の1つとしては降雪供給時に同時進行していく圧密の影響が考えられる。

参考文献

- 1) 阿部和久, 紅露一寛: VOF法を用いた積雪変形有限要素解析法, 構造工学論文集, Vol.51A, 277-284, 2005.
- 2) T.Yabe and T.Aoki: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, I. One-dimensional solver, II. Two- and three-dimensional solvers, Comp.Phys.Commun., 66, 219-242, 1991.