

熱流体連成解析に対する安定化有限要素法の精度検証

中央大学大学院	学生員	○八田 政知
中央大学大学院	学生員	岸 昌由
中央大学	正会員	田中 聖三
中央大学	正会員	櫻山 和男

1. はじめに

都市において、ヒートアイランド現象が顕在化して久しい。また、ヒートアイランド現象と連動して起こる大気汚染や粉塵公害も問題となっている。これらの対策として、屋上緑化、保水性舗装、打ち水等が注目を集めている。このような背景の下で、原因因子と抑制対策をデータ化し、数値解析により都市の熱・大気環境の変化を予測、検証することは重要であると考えられる。

そこで本研究では、都市の熱・大気環境解析手法の構築の基礎的段階として、温度場を考慮した安定化有限要素法¹⁾の精度検証を目的とし、数値解析例として3次元水平同軸二重円筒内自然対流問題を取り上げ、既存の実験値²⁾、および数値解析解³⁾との比較を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

非等温場における非圧縮性粘性流体を考え、Bossinesq 近似を仮定する。そのとき無次元化を施した運動方程式、連続式、エネルギー方程式はそれぞれ式 (1) ~ (3) で表される。

運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{Gr}{Re^2} Tk = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{PrRe} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right) = 0 \quad (3)$$

u_i は流速, p は圧力, T は温度, $Re (= UL/\nu)$ は Reynolds 数, $Gr (= g\beta(T_w - T_c)L^3/\nu^2)$ は Grashof 数, $Pr (= \nu/\alpha)$ は Prandtl 数, $Ra (= Pr \cdot Gr)$ は Rayleigh 数をそれぞれ表している。ただし, U は代表流速, L は代表長さ, ν は動粘性係数, g は重力加速度, β は体膨張係数, T_w は高温壁温度, T_c は低温壁温度, α は温度伝導率, k は鉛直方向の単位ベクトルをそれぞれ表している。

(2) 境界条件

Dirichlet 型, Neumann 型の境界条件は, 式 (4) ~ (7) で与えられる。

$$u_i = g_i \quad \text{on} \quad \Gamma_g \quad (4)$$

$$\left\{ -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} n_j = h_i \quad \text{on} \quad \Gamma_h \quad (5)$$

$$T = \hat{T} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\hat{T}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial n} = S \quad \text{on} \quad \Gamma_S \quad (7)$$

ここで, g_i , h_i はそれぞれ流速, トラクションの既知量, $\hat{T}$ は壁面既知温度, S は壁面上の単位法線方向温度勾配, n_j は外向き単位法線ベクトルを示す。

(3) 安定化有限要素法

式 (1), (2) に対して SUPG/PSPG 法, 式 (3) に対して SUPG 法に基づく安定化有限要素法¹⁾を適用すると, 以下の弱形式が得られる。

運動方程式, 連続式；

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left\{ -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} w_i \frac{Gr}{Re^2} Tk d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left\{ \tau_{supg1} u_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \tau_{pspg} \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right. \\ & \left. - \frac{Gr}{Re^2} Tk \right\} d\Omega = \int_{\Gamma_h} w_i h_i d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

エネルギー方程式；

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega + \frac{1}{PrRe} \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg2} u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{PrRe} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_S} w S d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, w_i , q は重み関数, τ_{supg1} , τ_{pspg} , τ_{supg2} は安定化パラメータを表している。空間方向の離散化には, P1/P1 (流速・圧力 1 次補間) 要素を用いて補間を行い, 時間方向の離散化には, 2 次精度を有する Crank-Nikolson 法を用いた。なお, 連続式, 圧力は陰的に取り扱っている。連立一次方程式の解法には, Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた。

KeyWords： 安定化有限要素法, 熱流体連成解析

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: hatta@civil.chuo-u.ac.jp

3. 数値解析例

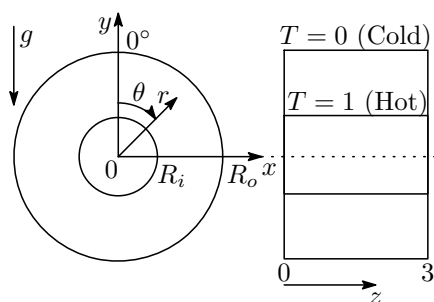


図-1 解析領域

表-1 解析条件

	Ra	$N_\theta \times N_r \times N_z$	ΔL_{min}	Δt
Case1	4.70×10^4	$96 \times 36 \times 30$	9.20×10^{-3}	1.0×10^{-4}
Case2	4.70×10^4	$60 \times 20 \times 30$	1.72×10^{-2}	1.0×10^{-4}
Case3	7.10×10^2	$60 \times 20 \times 30$	1.72×10^{-2}	1.0×10^{-3}

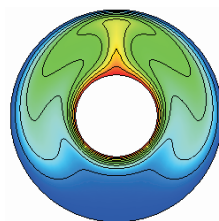
(1) 解析条件

解析領域を図-1に、解析条件を表-1に示す。境界条件は、流速に関しては壁面上で non-slip 条件とし、温度に関しては壁面で一定とする。また、円筒軸方向には周期境界条件を採用した。初期条件は、流速は全領域で0とし、温度は内筒壁面を除き0とする。また、代表長さは内筒と外筒のギャップ幅(= $R_o - R_i$)を用いている。表-1において、 N_θ , N_r , N_z は、それぞれ円周方向、半径方向、筒軸方向の要素分割数であり、円周方向、筒軸方向には等間隔、半径方向には壁面近傍で要素が密になるように分割した。 ΔL_{min} は最小要素分割幅、 Δt は微小時間増分である。また、Case1~3において、内筒と外筒の半径の比 R_o/R_i は2.6であり、 R_i は0.625、 R_o は1.625、Prandtl 数は0.71、Reynolds 数は1.41とし、無次元時間1.0まで計算を行った。

(2) 解析結果

図-2(a),(b)に、それぞれCase1,3(無次元時間1.0)における温度分布図を、図-3に、Case1,2(無次元時間1.0)における半径方向温度分布図を示す。

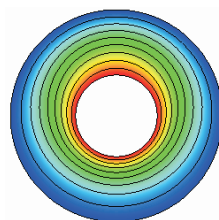
図-2(a)より、Case1はKuehnらによる実験結果²⁾と定性的に等温線が良い一致を示していることが確認できる。図-2(b)より、Case3は宇仁らの数値解析解³⁾と良い一致を示していることが確認できる。そして、(b) $Ra = 7.10 \times 10^2$ の場合には、ほぼ同心円状に温度が伝達しており、(a) $Ra = 4.70 \times 10^4$ と比較して、熱伝達における対流の影響が小さいことが確認できる。次に、図-3に半径方向温度分布図を示す。横軸は、ギャップ幅で無次元化された内筒からの距離である。Case1,2ともにKuehnらの実験値²⁾と良い一致を示している。また、図-3より、角度 $\theta = 30^\circ \sim 120^\circ$ の温度分布線では、低温の外筒側で温度がいったん上昇していることが確認できる。このような低温壁側に高温領域が現れる現象は、高温の内筒壁で加熱された流体が、浮力によって対流を起こし、低温の外筒壁に沿って下降していくために起こる。



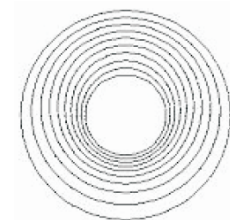
本研究 (Case1)



Kuehn ら

(a) $Ra = 4.70 \times 10^4$ 

本研究 (Case3)



宇仁ら

(b) $Ra = 7.10 \times 10^2$

図-2 温度分布図

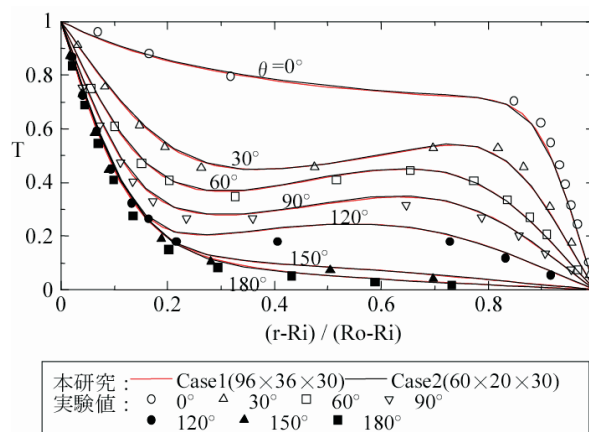


図-3 半径方向温度分布図

4. おわりに

本研究は、都市の熱・大気環境解析手法の構築の基礎的段階として、温度場を考慮した安定化有限要素法の精度検証を行った。数値解析例である3次元水平同軸二重円筒内自然対流問題を通じて、既存の実験値、および数値解析解と良好な一致を示し、本手法の有効性が確認できた。

今後の課題としては、LES 乱流モデル (Smagorinsky Model) の導入が挙げられる。

参考文献

- 1) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advanced in Applied Mechanics*, **28**, pp.1-44, 1991.
- 2) T.H.Kuehn and R.J.Goldstein: An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders, *J.Fluid Mech.*, **74**, part4, pp.695-719, 1976.
- 3) 宇仁真彦, 松田安弘, 邵長城, 吉野正人: 変形ガレルキン法による水平二重円筒内自然対流問題の解析, 第14回数値流体力学シンポジウム講演論文集, E06-1, 2000.