

# 高精度流体解析のための Semi-Lagrange Galerkin 法の開発

八戸高専 正会員 丸岡 晃  
八戸高専専攻科 学生員 小保内 啓太  
富山大学 正会員 奥村 弘

## 1. はじめに

近年、風上側の物理量の分布を局所的な 3 次補間関数によって近似し、Semi-Lagrange 法によって移流計算を行う CIP 法<sup>1)</sup>が高精度な手法として注目され、さまざまな分野で適用されている。そこで本研究では、高精度な非構造格子による流体解析手法の開発のために、Semi-Lagrange 法で必要となる物理量の高次補間を、有限要素法における要素内の内挿補間としてとらえ、構造解析分野における板曲げ問題で考案された高次補間要素を Semi-Lagrange 法による移流計算に適用する。さらに、非移流計算でも、同様の要素を適用し、有限要素法において一般的な Galerkin 法によって離散化する。この手法は、二つの手法を組み合わせたことから、Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法<sup>2),3)</sup>と呼んでいる。本研究では、完全 3 次三角形要素を用いる SLG 法を移流拡散方程式および非圧縮粘性流れに適用し、数値実験によって検討を行った。

## 2. 特性法

Semi-Lagrange 法では、特性法によって移流項を近似する。手法の概要を示すために、スカラー関数  $u(x, t)$  に関する移流拡散方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u - \nu \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{a}(x)$  は移流速度、 $\nu$  は拡散係数 ( $\nu \geq 0$ ) である。移流速度は、領域内で  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$  を満足するものとする。

Semi-Lagrange 法では、特性法によって移流項を以下のように近似する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u \approx \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})}{\Delta t} \quad (2)$$

ここで、 $u^{n+1}(\mathbf{x})$  は時刻  $t^{n+1} (\equiv (n+1)\Delta t)$  でのスカラー関数、また、 $u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})$  は時刻  $t^n (\equiv n\Delta t)$  での位置  $\mathbf{x}$  を起点とした特性曲線上の上流点  $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$  におけるスカラー関数であり、合成関数として表される。本研究では、1 次精度の Euler 法、または、2 次精度の予測子・修正子法によって上流点  $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$  を求める。

## 3. Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法

SLG 法では、移流計算と非移流計算を分離する Semi-Lagrange 法を適用する。特性法による移流項の近似式 (2) の右辺を 0 とし、さらに移流計算による解の更新を  $\tilde{u}$  とすると、移流計算は以下のように行われる。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x}) \quad (3)$$

非移流計算では、時間方向の離散化に次式のような Crank-Nicolson 法による近似を行う。

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} - \nu \Delta \frac{\tilde{u} + u^{n+1}}{2} = 0 \quad (4)$$

式 (4) の空間方向の離散化には Galerkin 法を適用する。

移流計算を精度よく行うためには、CIP 法の考えに従い、物理量の分布を高次補間関数によって近似する必要がある。本研究では、この高次補間に有限要素法による構造解析分野の板曲げ問題において考案された 1 階導関数値を自由度に含む完全 3 次三角形要素を適用する。さらに非移流計算においても、移流計算と同様の要素を適用し、Galerkin 法によって離散化する。この方法によれば、要素の自由度に 1 階導関数値が含まれるため、一般的な CIP 法と組み合わせた非移流計算法のように、支配方程式を 1 階微分した 1 階導関数値に関する時間発展方程式を導出する必要がなくなる。また、移流・非移流計算とも同様の物理量の補間が行われ、精度が損なわれないと考えられる。

計算効率の面では、連立 1 次方程式を解くのは非移流計算のみであり、さらに対称となる点において優れている。また、移流計算では、上流点が起点と離れていてもその位置を精度よく計算し、上流点の属する要素が正しく検索できれば、補間によって解の更新が可能である。よって、CFL 条件に制約されない大きな時間増分を選ぶことができ、安定性の面でも優れている。

## 4. 完全 3 次三角形要素

本研究では、計算領域を三角形領域  $K$  に分割し、スカラー関数  $u$  の補間には、図-1 に示すような三角形要素の頂点での関数値  $u_i$  とその 1 階導関数値 ( $\frac{\partial u}{\partial x}|_i, \frac{\partial u}{\partial y}|_i$ )、さらに要素の重心での関数値  $u_e$  を自由度とする 10 自由度の三角形要素を用いる。この要素は、完全 3 次補間となり、面積座標によって補間関数を陽的表示できる<sup>4)</sup>。

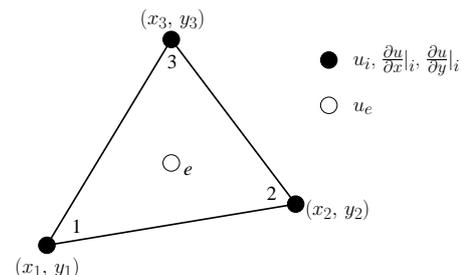


図-1 Complete cubic interpolated triangular element

三角形領域  $K$  における完全 3 次三角形要素による有限要素近似  $u_h|_K$  は、以下のように表される。

$$u_h|_K = \sum_{i=1}^3 \left( H_{0i} u_i + H_{xi} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + H_{yi} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i \right) + H_{0e} u_e \quad (5)$$

**Key Words:** FEM, CIP, Semi-Lagrange, Galerkin

〒039-1192 青森県八戸市大字田面木字上野平 16-1

TEL:0178-27-7304, FAX:0178-27-7316

ここで,  $H_{0i}, H_{xi}, H_{yi}$  は補間関数であり, 面積座標  $(L_1, L_2, L_3)$  の関数によって次式のように表される.

$$\begin{cases} H_{0i} = L_i^2(3 - 2L_i) - 7L_1L_2L_3 \\ H_{xi} = L_i^2(x_{ji}L_j - x_{ik}L_k) - (x_{ji} - x_{ik})L_1L_2L_3 \\ H_{yi} = L_i^2(y_{ji}L_j - y_{ik}L_k) - (y_{ji} - y_{ik})L_1L_2L_3 \\ H_{0e} = 27L_1L_2L_3 \end{cases} \quad (6)$$

ここで,  $(i, j, k)$  は  $(1, 2, 3)$  の偶置換であり,  $x_{ij} = x_i - x_j$ ,  $y_{ij} = y_i - y_j$  である.

なお, CIP 法から派生した CIVA 法<sup>5)</sup>では, 図-1 から要素重心での関数値を除いた 9 自由度の三角形要素を用いる. この場合, 3 次補間を行うには条件が一つたらず, 不完全 3 次補間となる.

### 5. 移流拡散方程式の数値計算例

一方向移流拡散問題に適用した数値計算例を示す.

正方形領域  $\Omega = (0, 2) \times (0, 2)$  において, 周期境界とする. 移流速度  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ , 拡散係数  $\nu$  をそれぞれ一定としたスカラー量  $u$  に関する移流拡散問題を考える. 初期条件を図-2 に示すような  $u(x, y, 0) = \sin \pi(x + y)$  とするとき, 解析解は  $u(x, y, t) = e^{-2\nu\pi^2 t} \sin \pi(x + y - (a_x + a_y)t)$  となる.

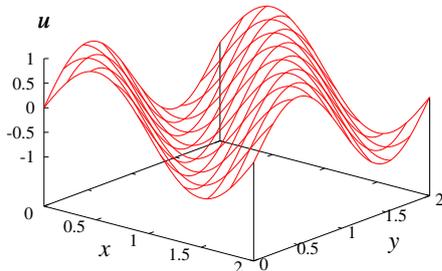


図-2 Initial condition ( $u(x, y, 0) = \sin \pi(x + y)$ )

計算メッシュは, 規則的に分割した Mesh(a) と Delaunay 分割した Mesh(b) を用いる. Mesh(b) では辺上の分割幅を Mesh(a) と同じ分割幅  $h$  に拘束し, 同程度の要素数に分割している. 計算条件は, 移流速度  $a_x = a_y = 1$ , 拡散係数  $\nu = 0.04$ , CFL 数 0.1 とする. 時刻  $t = 1.0$  まで計算し, その時刻での計算誤差を評価する. 比較対象として, 1 次三角形要素による SUPG 法の誤差評価も行っている.

図-3 にメッシュ幅と計算誤差の関係を示す. SLG 法は, Mesh(a),(b) とも 3 次精度以上である. SUPG 法と比較しても精度の差は大きく, 収束精度も SUPG 法の約 2 倍となっている.

### 6. 非圧縮性粘性流れの数値計算例

非圧縮性粘性流れに適用した数値計算例を示す.

非圧縮性粘性流れの場合も, 移流計算と非移流計算を分離する. 移流計算は流速場に対して式 (3) と同様に行う. 非移流計算では, 混合型有限要素近似として流速場に完全 3 次三角形要素, 圧力場に inf-sup 条件を満たすように流速場より低次の 1 次三角形要素を適用する.

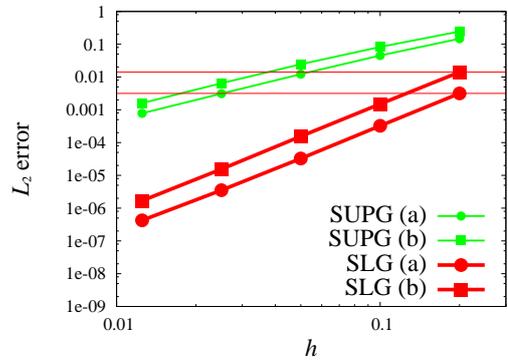


図-3  $L_2$  errors of advection diffusion problem

数値実験として Cavity 流れの計算を行った. メッシュは 1 辺を 20 分割した前節の Mesh(b) と同様である. Reynolds 数を  $Re = 1000$  とした計算結果を図-4 に示す. 計算結果は混合型有限要素近似を行っているため, 圧力振動が発生していない. また, 高次要素を用いているため, 比較的粗いメッシュを用いた場合でも, 高い Reynolds 数の計算を行うことができる.

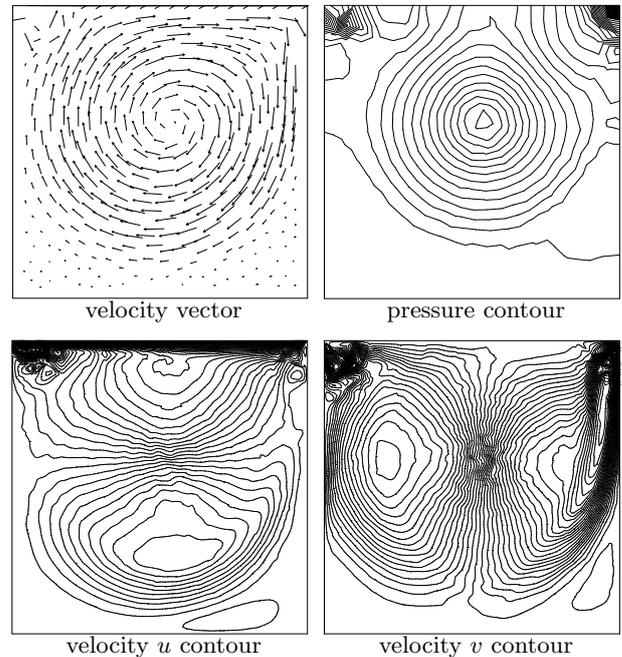


図-4 Numerical solutions at  $Re = 1000$

### 7. おわりに

本研究では, 移流拡散方程式および非圧縮性粘性流れに対して, 完全 3 次三角形要素を用いる SLG 法を開発し, 数値実験によって手法の検討を行った. その結果, 本手法は, 非構造格子においても非常に高い精度となることが示された.

#### 参考文献

- 1) 矢部 孝 他編: CIP 法 - 原子から宇宙までを解くマルチスケール解法-, 森北出版 (2003) など
- 2) 丸岡, 小保内, 奥村: Semi-Lagrange Galerkin 法の開発: (1)2 次元移流拡散方程式について, 第 20 回数値流体力学シンポジウム, C1-1(2006)
- 3) 奥村, 丸岡: Semi-Lagrange Galerkin 法の開発: (2)2 次元 Navier-Stokes 方程式について, 第 20 回数値流体力学シンポジウム, C1-2(2006)
- 4) K.H.Huebner 著, 山田 嘉昭 訳: 有限要素法, 科学技術出版社 (1978)
- 5) 田中: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 機論 (B), 64-620, 1071-1078 (1998)