

## 有限変形有限要素解析における F-bar 要素の適用

(株)豊田中央研究所 正員 渡邊育夢  
 東北大学大学院 正員 寺田賢二郎  
 Swansea university 非会員 Djordje Perić

## 1. はじめに

有限要素法はその汎用性からさまざまな分野で適用されており、近年では産業的なニーズを受けて非線形問題の解析も一般的になっている。大規模な問題に対する非線形解析では計算コストの観点から低次の形状関数を用いた要素が好まれる。しかしながら、低次要素は近似性能が十分でないため、しばしば高剛性な解を解析結果として与えてしまう。連続体の数値解析では、特に、変形時にほとんど体積の変化しないゴム弾性材料で顕著に見られる。また、塑性変形時に体積変化が生じない金属材料のような材料においても同様な現象が確認されている。この現象はロッキングと呼ばれ、高次の形状関数を用いずにこれを回避するための有限要素技術に関する研究がこれまでいくつかなされてきた。ここでは、そのひとつである F-bar 要素<sup>1)</sup>の特徴を示すとともに数値解析を実施し、その性能を示す。

## 2. F-bar 要素

F-bar 要素は非圧縮材料の有限要素解析時に生じるロッキングを回避するために提案された要素であり、微小変形問題における B-bar 要素と密接な関係がある。この要素では、変形勾配  $F$  を

$$F = F_{iso} F_v, \quad (1)$$

と乗算分解する。ここで、 $F_{iso}$ 、 $F_v$  はそれぞれ  $F$  の等体積と体積変化成分として

$$F_{iso} = (\det F)^{-1/3} F \quad \text{and} \quad F_v = (\det F)^{1/3} I \quad (2)$$

と記述する。要素中心の変形勾配を  $F_0$  とすると、F-bar 変形勾配は

$$\bar{F} = F_{iso}(F_0)_v = \left( \frac{\det F_0}{\det F} \right)^{1/3} F. \quad (3)$$

と定義される。四辺形と六面体の F-bar 要素は応力評価において単に  $F$  を  $\bar{F}$  で置き換えることによって得られる。また、反復収束計算のための接線係数も容易に導出することができる。さらに、この要素は高次の要素はもちろん定ひずみ要素にも適用可能な形式に一般化されている。

## 3. 単結晶体の引張試験シミュレーション

平面ひずみ条件において、図-1のような中心部に刻み目のある単結晶供試体の引張試験のシミュレーションを実施する。弾性特性をヤング率 206.9 GPa、ポアソン比 0.29 と与え、塑性特性として結晶塑性構成モデルを適用した。

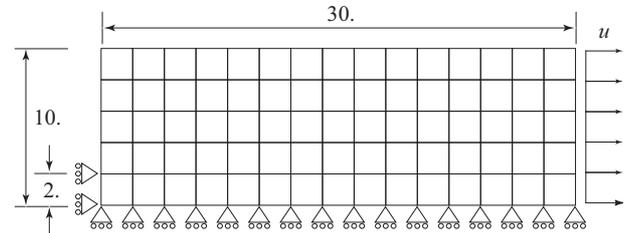


図-1 引張試験シミュレーションの解析モデル

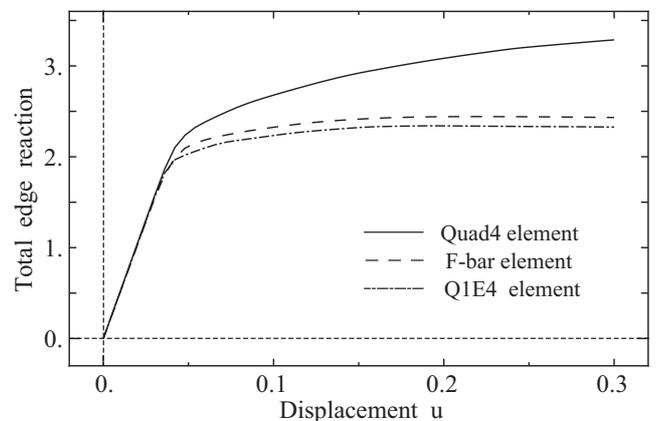


図-2 引張試験の荷重-変位関係

結晶塑性構成モデルのすべり系にはトリプルスリップモデルを用いた(材料定数は省略する)。結晶塑性構成モデルでは一般の金属塑性モデルと同様に塑性変形時に体積変化が生じない。ここでは、アイソパラメトリック一次四辺形要素(以下、Quad4要素と呼ぶ)とQuad4要素を基にしたF-bar要素、Quad4要素の形状関数に加え4つの拡張ひずみモードを挿入したQ1E4要素の結果を比較する。端部の反力の合計と変位の関係を図-2に示す。図からわかるようにQuad4要素ではF-bar要素とQ1E4要素の結果と比べて、かなり高剛性な解を与えてしまう。また、変位  $u = 0.3$  のときのMises応力分布を図-3に示す。Q1E4要素の結果ではこの程度の要素分割でも局所変形の様子が明確に見えるが、Quad4要素の結果では広範囲に渡って応力が高い部分が見られる。F-bar要素ではQ1E4要素ほどではないが、解が改善していることがわかる。

## 3.1 多結晶金属のマルチスケール解析

均質化法に基づくマルチスケールモデリングはミクロ組織の非均質性を有限要素法によってモデル化し、マクロモデルと連成させて解く手法である。よって、基本的にミクロスケールでは非均質変形が卓越する。ここでは、損傷を

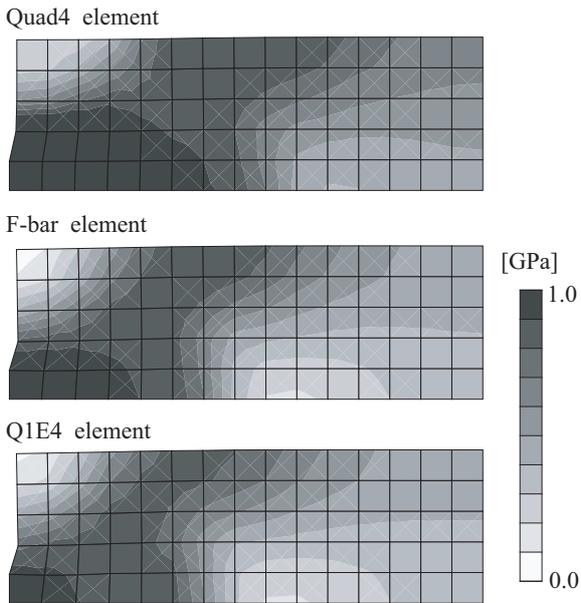


図-3 Mises 応力分布

考慮した結晶粒の構成モデルを適用した多結晶金属のマルチスケール解析において、Quad4 要素と F-bar 要素を比較する。

図-4 に示す各結晶粒が 147 要素からなる 9 結晶粒の多結晶モデルをマイクロモデルとして、マクロスケールでは単軸引張変形を与え、マルチスケール解析を実施した。結晶粒の弾性特性をヤング率 200. GPa, ポアソン比 0.3 と与えた。塑性特性としては前節と同様に結晶塑性構成モデルのすべり系にはトリプルスリップモデルを用いた(材料定数は省略する)。図-5 にマクロ軸応力-軸ひずみ関係を示す。本手法では結晶粒の損傷によって、マクロ剛性の低下を再現することができる。図に見られるように Quad4 要素と F-bar 要素では最大応力が全く異なる値となる。また、図中にマイクロスケールで損傷が発生した点を示しているが、これにも顕著な差が見られる。マイクロスケールではそれぞれ異なる異方特性を有する結晶粒同士が干渉しあう結果、結晶粒内は非均質な変形状態となる。この変形は塑性変形によってもたらされるものなので、前節と同様に、Quad4 要素ではロッキングが生じてしまう。この結果、Quad4 要素ではマクロ応答では確認することはできないが、マイクロスケールで応力集中が進み、損傷の発生・進展を誘起する。そして、最終的に F-bar 要素よりも少ない変形量でマクロ剛性の低下に至る。図-6 はそれぞれの要素でマクロ応力が最大となるときにマイクロスケールにおける損傷(応力低下の度合い)分布である。Quad4 要素では領域の各所で損傷が進んでいるが、F-bar 要素では損傷している領域は小さく、マクロ応答だけでなくマイクロスケールの変形状態も全く異なる結果となっている。

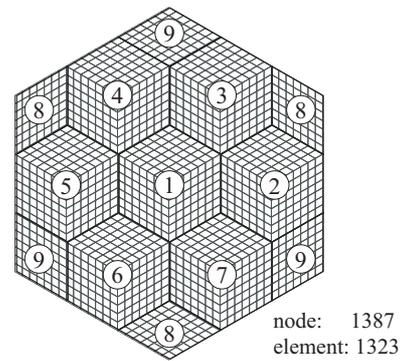


図-4 ミクロ多結晶有限要素モデル

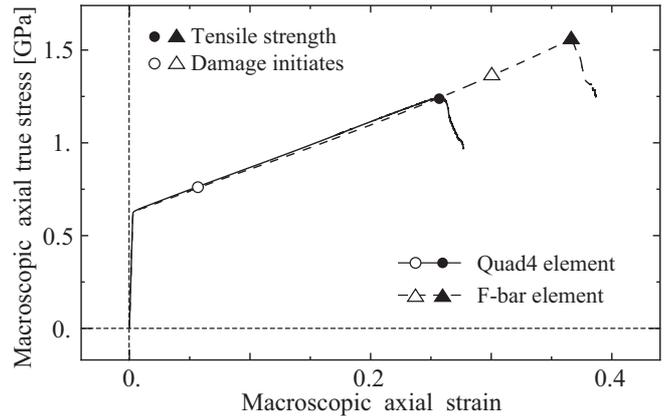


図-5 マクロ応力-ひずみ関係

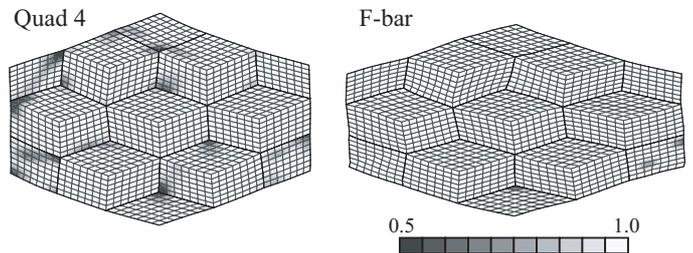


図-6 マクロ応力最大時の損傷(応力低下の度合い)分布

#### 4. まとめ

有限変形弾塑性問題における数値解析において F-bar 要素と低次要素を比較した。F-bar 要素は理論および導入は非常に単純でありながらその性能は高く、有用である。低次要素におけるロッキングは計算された解析結果からは判断しにくい、しばしば起こっており、ロッキングを回避する要素技術の採用はいかなる問題でも必須である。

#### 参考文献

- 1) de Souza Neto, E.A., Peric, D., Dutko, M. and Owen, D.R.J.: Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.33, pp.3277-3296, 1996.
- 2) 渡邊育夢, 寺田賢二郎: 結晶粒の損傷を考慮した多結晶金属のマルチスケール解析手法, 土木学会論文集 A, Vol.62, pp.772-781, 2006.