

VOF 法を用いた非圧縮超弾性体の トポロジー最適化手法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 小坂橋 智哉
新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

り実行する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^k}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial a^k}{\partial p} \Delta p &= L(\delta \mathbf{u}) - a^k, \\ \frac{\partial b^k}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial R^k}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial R^k}{\partial p} \Delta p &= -b^k - R^k \end{aligned} \quad (3)$$

3. トポロジー最適化手法

従来の密度法に基づくトポロジー最適化では, 設計領域に固定したメッシュ上で, 各要素における材料密度より物体形状を表現した. この手法では各有限要素の材料密度を設計変数とするため, トポロジーを意識せずに最適化を行うことができるという利点がある反面, 中間密度やチェッカーボード現象の発生などの問題点がある.

そこで本研究では VOF 法を用いる. VOF (Volume Of Fluid) 法では Euler メッシュ下の要素ごとに物質の占める割合を VOF 関数として与え物体領域を表現し, 物体形状の変化を VOF 関数の移流によって表現する.

(1) VOF 法を用いたトポロジー最適化

最適化問題 対象とする最適化問題を次のように定義する.

$$\underset{\psi}{\text{Minimize}} \quad \bar{J} = J(\mathbf{u}, p; \psi) + \lambda_+(V - V_{max}) \quad (4)$$

Subject to : $a(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}; \psi) = L(\delta \mathbf{u})$,

$$b(\mathbf{u}, p, \delta p; \psi) + R(\mathbf{u}, p, \delta p; \psi) = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \lambda(V - V_{max}) = 0, \lambda \geq 0$$

ここで, $\bar{J}$ は目的汎関数, J はコスト関数, V_{max} は許容最大体積, λ は体積制約に関する Lagrange 乗数である.

設計感度解析 VOF 関数 ψ の変動による解の増分を $\Delta \mathbf{u}$, Δp とし, これらによる $\bar{J}$ の増分を $\Delta \bar{J}$ とすると, $\Delta \bar{J}$ は次式のように与えられる.

$$\Delta \bar{J}(\mathbf{u}, \psi) = \Delta J(\mathbf{u}, \psi) + \lambda \Delta V(\psi) \quad (6)$$

$$\text{ここで,} \quad \Delta J = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial J}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial J}{\partial \psi} \Delta \psi \quad (7)$$

なお, $\partial/\partial()$ は Fréchet 微分を表す. 式 (7) より ΔJ の評価には $\Delta \mathbf{u}$, Δp の評価が必要になる. これらを直接導出することなく式 (7) を評価する目的で随伴変数法を用いると, 最終的に次式を得る.

$$\Delta \bar{J} = \int_{\Omega} (-\beta + \frac{\partial F}{\partial \psi} + \lambda_+) \Delta \psi d\Omega \quad (8)$$

1. はじめに

大変形下における非圧縮超弾性体のトポロジー最適化では, 孔までもが非圧縮となり, 内部に圧力が発生するなど適切なトポロジーを求めることが容易ではない. そのため最適化手法の構築には工夫を要する. 本研究では鉄道軌道に用いられるゴムパッドの防振性能の向上を最終目的とし, これまでに構成してきた VOF 法を用いたトポロジー最適化手法¹⁾の大変形非圧縮超弾性体への適用を試みる.

2. 非圧縮超弾性体の大変形解析

設計領域で非圧縮超弾性体が占有する領域を, 後述の VOF 関数 ψ により表現する. 本来物質の存在しない領域についてはせん断弾性係数を ψG により低減して与え, その際に非物質点を圧縮性線形弾性体で表現し, 前述の問題点の回避を図る. 有限要素方程式は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}; \psi) &= L(\delta \mathbf{u}), \\ b(\mathbf{u}, p, \delta p; \psi) + R(\mathbf{u}, p, \delta p; \psi) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで,

$$\begin{aligned} a &= \int_{\Omega} \omega_1 [\psi 2G \boldsymbol{\epsilon} : \delta \boldsymbol{\epsilon} - \frac{3\nu}{1+\nu} \text{ptr}(\delta \boldsymbol{\epsilon})] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \omega_2 [\psi \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} - p \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C}] d\Omega, \\ b &= \int_{\Omega} \omega_1 [p + \psi \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})] \delta p d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \omega_2 \psi G (1 - J) \delta p d\Omega, \\ R &= \sum_e \tau \{ \int_{\Omega_e} \omega_1 (\nabla_X \delta p) \cdot (\nabla_X p) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_e} \omega_2 2 \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} : [(\nabla_X p) \otimes (\nabla_X \delta p)] d\Omega \} \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2) で ω_1, ω_2 は ψ の関数であり, それぞれ線形弾性体と非圧縮超弾性体の方程式の重み関数である. なお, $\boldsymbol{\epsilon}, \nu$ は線形弾性体の微小ひずみとポアソン比, $\tilde{W}, \mathbf{C}, J$ は非圧縮超弾性体の弾性ポテンシャル関数, 右 Cauchy-Green テンソル, および体積変化率を示す. また, p は圧力, $\bar{\Omega}$ は設計領域, τ は安定化項, $L(\delta \mathbf{u})$ は外力項である.

式 (1) は変位 $\mathbf{u}$ と圧力 p に関する非線型方程式となるので, 求解は増分方程式に基づき Newton-Raphson 法によ

keywords : VOF 法, 非圧縮超弾性体, トポロジー最適化
連絡先 : 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地
TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

ここで,

$$\int_{\Omega} \beta \Delta \psi d\Omega = \left(\frac{\partial a}{\partial \psi} + \frac{\partial b}{\partial \psi} + \frac{\partial R}{\partial \psi} \right) \Delta \psi, \quad (9)$$

$$J = \int_{\Omega} F(\mathbf{u}, p; \psi) d\Omega$$

VOF 関数の移流速度 VOF 法では構造物の形状変化を ψ の移流により記述する。 ψ の移流速度を $\mathbf{v}$ とすると、以下の移流方程式を得る。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \psi \quad (10)$$

最適化過程において目的汎関数 $\bar{J}$ が単調減少するように、移流速度 $\mathbf{v}$ を次式で与える。

$$\mathbf{v} = (-\beta + \frac{\partial F}{\partial \psi} + \lambda_+) \nabla \psi \quad (11)$$

また、移流過程において生じる数値拡散の抑制を目的として CIVA 法を適用し、さらに物体境界をより明確にすることを目的とし正接関数変換を併用する¹⁾。

4. 解析結果

解析例として、二次元平面ひずみ問題における最終コンプライアンス最小化問題を考える。このときの F は次式で与えられる。

$$F = \omega_1 [\psi 2G \epsilon : \epsilon - \frac{3\nu}{1+\nu} \text{ptr}(\epsilon)] + \omega_2 [\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} : \mathbf{C} - p \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} : \mathbf{C}] \quad (12)$$

なお、以下の解析では ω_1, ω_2 を次式で与えた。

$$\omega_1 = 1 - \omega_2, \quad \omega_2 = 2(\psi - 0.5)_+ \quad (13)$$

ただし、 $\psi \leq 0.5$ のとき $(\psi - 0.5)_+ = 0$ とする。また、超弾性体の材料定数 $c_1 = 0.3, c_2 = 0.1(\text{N/mm}^2)$ とし、線形弾性体のポアソン比 $\nu = 0$ 、せん断弾性係数 $G = 0.8(\text{N/mm}^2)$ とした。

なお、比較的初期の最適化段階における形状は複雑なため、荷重増分過程で座屈などが生じ解が収束しない恐れがある。そこで、荷重増分回数を最適化ステップの前半では1回とした。また、計算の効率化を図る目的で、一回の最適化計算で得た移流速度の下で複数回の移流計算を実行した。

(1) 解析例 1

アスペクト比 3:2 の片持ち梁の右端中央三節点に、各々下向きに $\Delta P = 0.001(\text{N})$ の節点力増分の下、最大で $0.040(\text{N})$ まで載荷した場合を考える (図 1)。解析領域は $2.0\text{mm} \times 3.0\text{mm}$ とし、 20×30 に要素分割を行う。また、一回の感度解析ごとに移流計算を 3~5 回行った。

トポロジーの変化の様子を図 2 に示す。二部材トラスが安定に得られており、最適化過程が適切に実行されていることが確認できる。4 ステップ、20 ステップにおける荷重-変位曲線を図 3 に示す。いずれの形状でも強い非線形性が

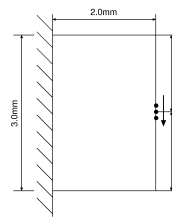


図 1 解析条件 (解析例 1)

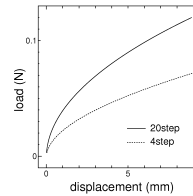


図 3 荷重-変位曲線

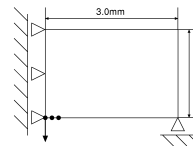


図 5 解析条件 (解析例 2)

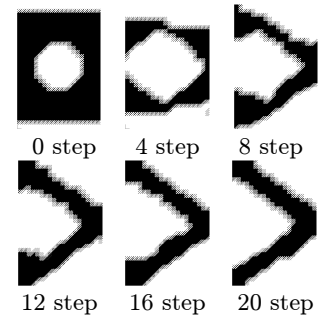


図 2 最適化過程における形状変化

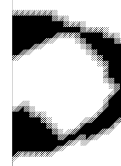


図 4 適切な処理を行わなかった場合の形状

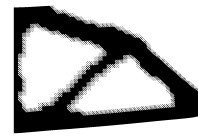


図 6 最終形状

認められるが、最終トポロジー下での剛性が大幅に向上していることがわかる。材料が分布しない領域でも非圧縮超弾性体として定式化した場合に得られた形状を図 4 に示す。明らかに不合理な形状が得られており、材料の配置されない領域の適切な処理が重要であることがわかる。

(2) 解析例 2

単純支持されたアスペクト比 1:3 の梁の下端中央六節点に、各々下向きに $\Delta P = 0.0005(\text{N})$ の節点増分の下、最大で $0.005(\text{N})$ まで載荷した場合を考える。解析にあたり、対称性を考慮し右半分の領域のみを考える (図 5)。解析領域は $3.0\text{mm} \times 2.0\text{mm}$ とし、 30×20 に要素分割した。また、一回の感度解析ごとに移流計算を 2~4 回行った。最終トポロジー下での変形の様子を図 6 に示す。最終的に 9 部材からなるトラス橋の形状に収束しており、梁の中央部が大きく変位していることがわかる。

5. 結論

非圧縮超弾性体を対象とし VOF 法を用いたトポロジー最適化手法の構築を行い、最終コンプライアンス最小化問題への適用を試みた。その結果、不合理な圧力の発生もなく、安定に良好なトポロジーを得ることができた。

参考文献

- 1) 西宮裕騎・阿部和久・紅露一寛: 三角形・四面体要素を用いた VOF 法によるトポロジー最適化法, 応用力学論文集, Vol.9, 2006.