

1 次の変位場を用いた HPM による 3 次元モデルの開発

法政大学 (JIP テクノサイエンス 株式会社)

正会員 ○見原 理一

法政大学

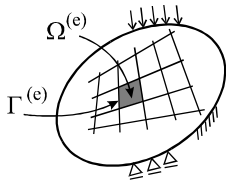
正会員 竹内 則雄

1. 目的

著者らは、ハイブリッド型の仮想仕事の原理[1]を基礎にペナルティ法の概念を応用したハイブリッド型ペナルティ法(HPM: Hybrid-type Penalty Method)と称する新しい離散化手法を提案した[2]。HPM では、全体領域を部分領域に分割し、それぞれの部分領域において独立に変位場が定義される。本研究では 3 次元モデルへ拡張した HPM の数値解析例を紹介する。

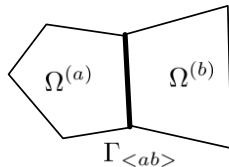
2. ハイブリッド型仮想仕事の原理

いま 図 1 に示すように領域 Ω が閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとする。

図 1 部分領域 $\Omega^{(e)}$

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \text{ ただし } \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = \emptyset \quad (r \neq q) \quad (1)$$

また、 $\bar{\Omega}^{(e)} := \Omega^{(e)} \cup \partial\Omega^{(e)}$ を $\Omega^{(e)}$ に境界を加えてできる閉包とする。

図 2 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では、図 2 に示すように、隣接する 2 つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$ 、すなわち、

$$\Gamma_{<ab>} \stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (2)$$

3. 部分領域毎に独立な 1 次の変位場

3 次元領域のある領域 $\Omega^{(e)}$ に着目し、変位 $u(x)$ を点 $x_P = (x_P, y_P, z_P) \in \Omega^{(e)}$ についてテーラー展開すると次のようになる。

$$u^{(e)} = u^P + (x - x_P)u_x^P + (y - y_P)u_y^P + (z - z_P)u_z^P \quad (7)$$

ここで、

$$(\bullet)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\bullet), \quad (\bullet)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\bullet), \quad (\bullet)_z = \frac{\partial}{\partial z}(\bullet)$$

において、付帯条件

$$\tilde{u}^{(a)} = \tilde{u}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (3)$$

を Lagrange の未定乗数 λ を用いて、

$$H_{ab} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda \cdot (\tilde{u}^{(a)} - \tilde{u}^{(b)}) dS \quad (4)$$

と表し、仮想仕事式に導入する[3]。ただし、 $\tilde{u}^{(a)}$ ならびに $\tilde{u}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の変位を表している。

いま、隣接する 2 つの部分領域境界辺の数を N とすると、ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \sigma : \text{grad}(\delta u) dV - \int_{\Omega^{(e)}} f \cdot \delta u dV \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda \cdot (\tilde{u}^{(a)} - \tilde{u}^{(b)}) dS \right) - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{t} \cdot \delta u dS = 0 \quad \forall \delta u \in \mathbb{V} \quad (5)$$

なお、Lagrange の未定乗数 λ は、次式のように、 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を意味している[2]。

$$\lambda = t^{(a)}(\tilde{u}^{(a)}) = -t^{(b)}(\tilde{u}^{(b)}) \quad (6)$$

ここで、 $t^{(a)}$ と $t^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力である。

$$(\bullet)_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\bullet), \quad (\bullet)_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\bullet), \quad (\bullet)_{zx} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(\bullet)$$

なる関係があり、 $(\bullet)^P$ は点 x_P における物理量 $(\bullet)$ の値を示している。いま、 x 方向変位を u 、 y 方向変位を v 、 z 方向変位を w とするとき

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

キーワード ハイブリッド型ペナルティ法、3 次元モデル

連絡先 〒103-0025 東京都中央区日本橋茅場町 1-2-5 JIP テクノサイエンス(株) 解析技術部 TEL:03-5690-3204

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \theta_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

なる関係がある．これを式(7)で示されるある領域の 1 次の変位場を表すと次のようになる．

$$\begin{aligned} u &= u_0 + X\varepsilon_x - \frac{1}{2}Y\theta_z + \frac{1}{2}Z\theta_y + \frac{1}{2}Y\gamma_{xy} + \frac{1}{2}Z\gamma_{zx} \\ v &= v_0 + Y\varepsilon_y + \frac{1}{2}X\theta_z - \frac{1}{2}Z\theta_x + \frac{1}{2}X\gamma_{xy} + \frac{1}{2}Z\gamma_{yz} \\ w &= w_0 + Z\varepsilon_z - \frac{1}{2}X\theta_y + \frac{1}{2}Y\theta_x + \frac{1}{2}X\gamma_{zx} + \frac{1}{2}Y\gamma_{yz} \end{aligned} \quad (8)$$

ただし，

$$\left. \begin{aligned} X &= x - x_P \\ Y &= y - y_P \\ Z &= z - z_P \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

また， u, v, w, θ は点 x_P における x, y, z 方向変位ならびに剛体回転を表している．式(8)をマトリックス形式で簡単に次のように書く．

$$u = N_d d + N_\varepsilon \varepsilon \quad (10)$$

ここで，それぞれの係数行列を次に示す．

$$d = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z]^t, \quad \varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^t$$

4．数値解析例

純せん断が作用する問題として，図 3 に示すような正方形領域を考え，その側面に面分布荷重を作用させ，底面及び側面をローラー拘束とした．また，要素分割数は， $12 \times 12 \times 12$ 分割とした．

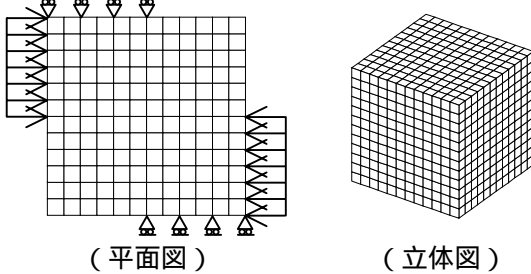


図 3 解析モデル

荷重載荷方向のひずみを ε_x 、直交方向を ε_y とした解析結果を図 4 に示す．図 4 に示すように FEM による解析と同様の分布傾向となり，HPM による解析においても，ポテンシャル領域である荷重載荷方向の 45° 方向にひずみの高い領域が発生する傾向が得られた．

5．まとめ

本論文で，3 次元モデルへと拡張した HPM の離散化手法を紹介した．HPM は，要素頂点で自由度を設定する必要が無いことから，3 次元モデルであっても要素の細分割化が用意である．今後は，要素細分割を行なったモデルを用い，既往の実験との比較検証を行なう予定である．

参考文献

- 1) K.Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1975
- 2) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000
- 3) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 日本鋼構造協会編, 培風館, 1972

$$N_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}Z & -\frac{1}{2}Y \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}Z & 0 & \frac{1}{2}X \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}Y & -\frac{1}{2}X & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & \frac{1}{2}Y & 0 & \frac{1}{2}Z \\ 0 & Y & 0 & \frac{1}{2}X & \frac{1}{2}Z & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & \frac{1}{2}Y & \frac{1}{2}X \end{bmatrix}$$

このように，本論文で用いる変位場は，領域内における任意点の変位に加え，直接，ひずみを自由度として扱う．また，各領域内の任意点におけるパラメータを用いて変位場を表しているため，要素頂点に自由度を設定しない．すなわち，本モデルにおける頂点は領域形状を認識するために用いるのであって，従来の FEM のように頂点は形状関数に支配されない．したがって，要素形状は，特に限定されず，任意の多面体を部分領域として用いることができる．

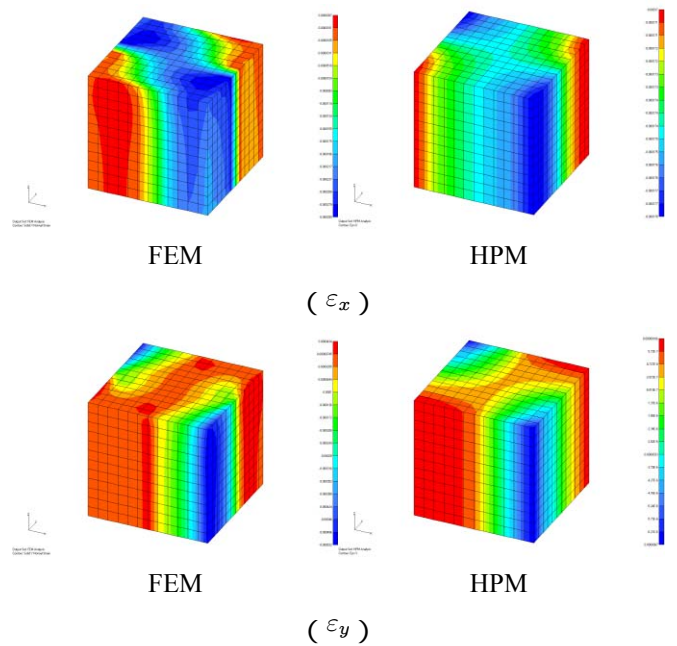


図 4 解析結果