移動最小自乗法における関数の台の設定と節点配置

清水建設技術研究所　正会員　○櫻井　英行

1. はじめに

移動最小自乗法(MLSM)は，次のような特徴を備えていることから有望視され，メッシュフリー法を代表する関数近似の方法として，様々な研究開発が行われてきた[1].

a1. 近似関数の微分連続性の実現が容易

a2. 要素の概念なしに関数近似が可能

a3. 不規則な節点配置にも解の精度が悪化しにくい

大変形，亀裂進展，歪みの局所化，C^1 連続問題への適用，h-adaptive 法との組み合わせ，不整合メッシュとの組み合わせによるCAEシステムの開発などは，上記の三つの特徴のいずれか，もしくは，組み合わせの応用である．一方，欠点も少なくない．

d1. 数値積分に工夫が必要

d2. Dirichlet 型境界条件の扱いが特殊

d3. MLSM の台の大きさに解析精度が強く依存

d4. 計算時間が多大

このうち，d3 の解析精度の依存性は，度々指摘はされてきたが，研究報告は少なく，他の欠点に比べて曖昧になっているのが実状である．本論文では，この台に対する解析精度の依存性に着目し，問題点を整理しながら，節点分布との関係，並びに，台の大きさの設定に関する効率的なアルゴリズムについて考察する．

2. 関数の台と節点分布

MLSM では，一般に領域内の任意の点 $\bar{\mathbf{x}}$ における未知関数 $\phi(\mathbf{x})$ を多項式で近似し，次の評価関数の最少条件から多項式の未知係数を決定する．

$$J = \sum_{i}^{N} w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})[\{p_m(\mathbf{x}_i)\}^T\{a_m(\bar{\mathbf{x}})\} - \phi_i]^2 \tag{1}$$

ここで，$\{p_m(\mathbf{x})\}$ は基底，$\{a_m(\bar{\mathbf{x}})\}$ は未知係数，N は点 $\bar{\mathbf{x}}$ を中心とする近似関数の台（影響領域）に乗る節点の数である．$\mathbf{x}_i$ は，i 番目の節点の空間座標値であり，ϕ_i は $\mathbf{x}=\mathbf{x}_i$ における ϕ の節点値である．$w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})$ は重み関数であり，MLSM において非常に重要な役割を演じる．台の上でのみ値を持ち，台に乗る節点の関数近似への寄与分（重み）を与える．適切な重み関数を選択することにより，領域全体で滑らかな近似を行うことも可能にする．岩崎・林[2]は，二次元弾性問題を対象に 15 種の重み関数による解析精度の比較を行った．結論として精度が良いとしたのは，いずれも近似関数の 2 階微分までの連続条件を満足させることができる関数であり，よく用いられる四次スプラインも含まれる．

MLSM による近似の善し悪しには，重み関数の関数系だけでなく，関数が定義される台の形と大きさも強く影響する．しかし，最適な台を設定する方法は報告されていない．台は一般に二次元では円，三次元では球に設定され，半径は，評価点近傍の節点分布密度との関係から経験的な値に設定されているのが実状である．したがって，解析領域の節点配置には注意が必要である．

2.1 理想は一様節点分布で大きさ一定

解析領域内の任意の点で，同じ重み関数を用いるとすると，近似の滑らかさは，領域内の任意の点で台の大きさを一定に保つことにより実現される．冒頭述べた MLSM の利点 a1 は，正確には，台の大きさを一定に保つという条件の下に成立する．台の大きさを変えると，微分連続性どころか C^0 連続性すら失われる．

良好な解を得るための台の大きさは，節点間隔に依存するため，理想的には，解析領域内で節点を一様に分布させ，台の大きさを一定にして解析するのが望ましい．節点分布の粗密が大きい場合，台の大きさを一定に保とうとすると分布の粗い場所で台の大きさが決まり，密な部分での近似の局所性が失われ，妥当な解が得られなくなることすらある．また，アスペクト比の大きな四辺形による分割のように節点分布の方向性が強い場合も，関数近似がアンバランスになり，解析精度が著しく悪化する[3].

2.2 実用上は節点分布の粗密に対応した大きさ

しかし，実用上は，FEM 同様，解析者の意向による節点分布の粗密を許す方法でありたい．この場合，近似の連続性を厳密に満足させることは諦め，節点密度に応じて台の大きさを変化させる方法がとられる．研究報告等では，明確に言及されてはいないものの，節点密度の滑らかな変化は，数値的には許容できるとして扱われているのが実状であろう．ただし，急激な粗密の変化により，重大な不連続性が生じ，妥当な解が得られないこともある．h-adaptive 法との組み合わせは，そもそも，利点 a1 は，期待していないことになるが，節点の追加が，急激な台の大きさの変化を要求し，近似の不連続性を生じさせ，解を悪化させる場合もある．これを避けるため，h-adaptive 法で節点を追加した後，動力学シミュレーションにより節点配置を修正する方法も提案されている[4]．したがって，冒頭の利点に対し，以下の疑念が自然と生じてくる．

q1. MLSM は，本当に大変形に強いのか？

q2. MLSM は，本当に h-adaptive 法と相性が良いのか？

両者とも節点分布の粗密が大きくなる可能性が高いことに注しなければならない．

3. 台の大きさの設定のための計算機処理

さて，上述の節点配置に関する注意点の他に，節点分布に応じた台の大きさの設定のための効率的なアルゴリズムも課題であると認識する．最も端的な方法は，評価点から近い順に節点を検索し，式(1)の基底を一意に定める最少の節点を集め，その中で，評価点から最も遠い節点との距離を基準半径 $\bar{r}_i$ とし，上述の経験値に対応するスケール・ファクタ κ を乗ずる方法であろう[5]．しかし，この方法では，領域内の全評価（積分）点において，全節点を対

キーワード：移動最小自乗法，メッシュフリー，影響領域，解析精度，節点検索

連絡先：〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17　清水建設（株）技術研究所　社会基盤技術センター　TEL(03)3820-8419

象に距離計算とソートを行うため，計算効率が非常に悪い．

空間中に不規則に分布した点群を検索する際に，**図 1** に示すような構造格子がしばしば用いられる．予め，適当な構造格子を発生させ，各格子が含む点群情報を調べておき，点を検索する際に格子のアドレスを利用する方法である．この方法は，MLSM の台の大きさが予め決まっていて，台の上に乗る節点を検索する場合には，大変有効である．しかし，評価点近傍の節点の粗密に応じて台の大きさを決定する際には，注意と工夫が必要である．検索順序としては，評価点が属する格子から順に，それを取り囲む格子群内の節点を放射状に検索してことになろう．例えば，式(1)の$\{p_m(\mathbf{x})\}$が二次元の線形基底であれば，同一直線上にない 3 点が検索された時点で$\bar{r}_i$が決まるので，**図 1** の例では，評価点⊗が属する格子の 1 層外側のグレーの格子層まで検索した時点で条件を満たす節点が集まることになる．図中の円の半径は$\bar{r}_i$に対応するが，実際には，その円の中には検索した格子の2層分外側の節点も含まれる．正しくは，★の節点で$\bar{r}_i$が決まらなければならない．評価点が属する格子を第 1 層とすると，条件を満たす節点が第j層で検索されたとしたら，第$\mathrm{int}(j\sqrt{2}+2)$層までの節点を対象とする必要がある．

また，計算効率の面では次の方法が有利であると考えられる．基底関数の項数をmとすると，二次元では，

s0. 全節点を包含する構造格子を発生させる．

s1. 各格子が含む節点のリスト(セル情報)を作る．

以降，各評価(積分)点について，

t0. $j=0$とし，収集する節点のリスト(節点リスト)をクリアする．

t1. $j=j+1$

t2. セル情報から第j層の節点群を節点リストに加える．

t3. 節点リストの節点数nがm個より少なければ t1 へ．

t4. 収集したn個の節点で次の$[R_{mm}]$を計算する．

$$[R_{mm}]=[D_{mn}][D_{mn}]^T \tag{3}$$

$$[D_{mn}]=[\{p_m(\mathbf{x}_1)\} \quad \{p_m(\mathbf{x}_2)\} \quad \cdots \quad \{p_m(\mathbf{x}_n)\}] \tag{4}$$

t6. $[R_{mm}]$の正則性が悪ければ t1 へ．

t7. 第$\mathrm{int}(j\sqrt{2}+2)$層までの節点群を節点リストに加える．

u0. 評価点と節点リスト内の節点との距離$\bar{d}_i$を計算する．

u1. 節点リストを$\bar{d}_i$の昇順にソートする．

u2. 節点リストの先頭から$m-1$個を取り出す($i=m-1$)．

u3. 次の一つの節点をリストから取り出す($i=i+1$)．

u4. 取り出した節点で$[R_{mm}]$を計算する．

u5. $[R_{mm}]$の正則性が悪ければ u3 へ．

u6. $\bar{d}_i$を基準半径$\bar{r}_i$とし，κを乗じて台の半径とする．

これは、t0 から t4 の層単位の処理で候補節点を収集することにより，u0 以降の計算効率の向上を図るアルゴリズムである．ただ，u0 から u6 については，基底関数の項数が大きい場合や三次元の場合など，条件によっては，u1 でのソートの計算負荷が大きくなることが想定される．この場合，上記 t7 までの処理で収集された節点群に対し，**図 2** に示すような評価点を中心とした同心円群を利用することにより計算効率を向上させることができる．先の構造格子と同様，予め，各節点がどの円環に属するかのリストを作り，上記の t0 から t6 の処理を実行する．円環であれば，t7 の処理は必要ない．外側の格子層になるほど含まれる節点群は増大するし，円環であれば t6 の正則性が満足されたとき，$j=j-1$までの節点群はソートの対象から除外できるので，ソートの対象節点数はかなり少なくて済む(構造格子の**図 1** では全 11 節点，同心円の**図 2** を利用すると 3 節点)．条件にもよるが計算効率の大幅な向上が期待できると考えられる．

5. おわりに

本論文では，MLSM の関数の台と節点配置の関係について考察し，節点配置に関する考慮事項を整理した．また，節点分布に順応した台の大きさを設定する効率的なアルゴリズムを提案した．MLSM は，節点分布の任意性に対して強い方法ではないが，その一方で，冒頭の利点も備えていることも事実である．台の設定方法の研究が，MLSM をより有用な近似法にするものと考える．

引用文献

1) 樫山ら，国際フォーラム「土木工学における計算力学手法の新展開」の企画調査，科研費報告書，16636010 (2005).
2) 岩崎，林，2 次元弾性問題におけるエレメントフリーガラーキン法の精度，計算工学講演会論文集，3, 331-334 (1998).
3) 櫻井，EFGM の解析精度と節点配置の方向性，計算工学講演会論文集，12, (2007)，投稿済.
4) 安河内ら，誤差と関連した節点移動によるアダプティブ EFG 解析，第 18 回計算力学講演会論文集，381-382 (2005).
5) 櫻井，メッシュ生成問題に供するメッシュフリー法と不整合メッシュの応用，機械学会論文集 A-70-691，346-353 (2002).

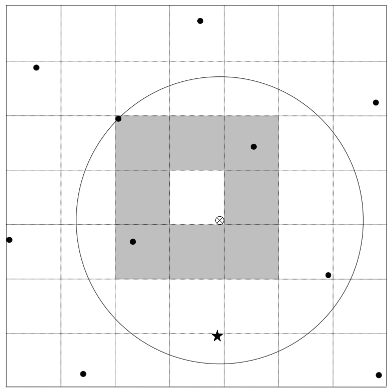

図 1 台の半径設定のための構造格子

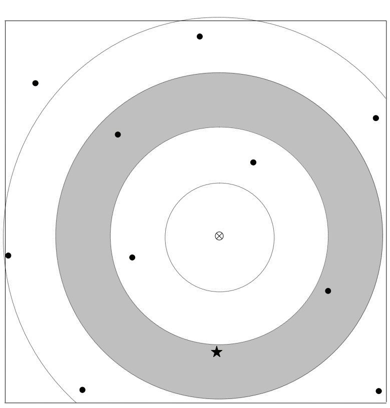

図 2 計算効率向上のための円環構造