

直交異方性を考慮した多層弾性構造体解析プログラムの開発

東京電機大学大学 正会員 ○小澤 良明
東京電機大学大学 フェロー会員 松井 邦人

1. 目的

平成 13 年に道路構造令が改定され、道路の設計も従来の経験に基づく方法だけでなく理論的に設計することも可能となった。理論的設計法では舗装を複数の等質・等方性の層からなる弾性構造と仮定している。この目的のために GAMES が開発されている。

しかし、舗装は転圧して構築していることを考えると、その力学的特性は等方性より直交異方性と考えられる。本研究では、舗装構造を直交異方性の多層弾性体と仮定し、解析を行える理論とプログラム開発を目指した。

開発プログラムの精度確認方法として、GAMES の解析値と比較を行った。また、直交異方時の表面変位の挙動を確認するために、水平方向の弾性係数を変化させ表面変位を解析した。

2. 軸対象多層弾性理論

軸対象弾性問題の変位と応力成分を、水平方向 r を $u_r \cdot \sigma_r$ 、鉛直方向 z を $u_z \cdot \sigma_z$ 、回転方向 θ の応力を σ_θ 、せん断方向の応力を τ_{rz} で示すと、軸対象応力の平衡方程式は、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1-a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (1-b)$$

本問題は、式(1)の釣合い式を解く事になる。ここで、応力と変位との関係は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & 0 \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_r / \partial r \\ u_r / r \\ \partial u_z / \partial z \\ \partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式(2)にて表せる。ここで $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{33}, a_{44}$ は、弾性係数 E_1, E_2 、ポアソン比 ν_1, ν_2 、横弾性係数 G_2 の物性値を含んだマトリクス成分である。

式(1)に式(2)の関係を代入すると、変位の平衡方程

式が求まる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + b_{11} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_r + b_{12} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = 0 \quad (3-a)$$

$$b_{21} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + b_{22} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z = 0 \quad (3-b)$$

ここで $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ は、 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{33}, a_{44}$ を含む係数である。式(3)にハンケル変換を適応させ、 u_z について式展開を行うと、

$$\left(\frac{d^4}{dz^4} - c_{11}^2 \xi^2 \frac{d^2}{dz^2} + c_{12}^4 \xi^4 \right) u_z = 0 \quad (4)$$

4 階の微分方程式になる。 u_z を

$$u_z = e^{\lambda z} \quad (5)$$

と定義し、微分方程式を解く。

$$u_z = A e^{\lambda_1 z} + B e^{\lambda_2 z} + C e^{\lambda_3 z} + D e^{\lambda_4 z} \quad (6)$$

ここで、 $\lambda_{1 \sim 4}$ は、

$$\lambda_{1 \sim 4} = \pm \xi \sqrt{\frac{c_{11}^2 \pm \sqrt{c_{11}^4 - 4c_{12}^4}}{2}} \quad (7)$$

図-1 に示す多層構造を考える。最下層(第 n 層)は半無限層である。半無限層では、式(6)の発散項を含む積分定数はゼロとなり、4 項の積分定数は 2 項になる。

表層(第 1 層)と最下層との関係から、最下層の積分定数が求まる。最下層と各層との伝達マトリクスより各層の積分定数を求められ、ハンケル変換内の応力と変位の式が求まる。

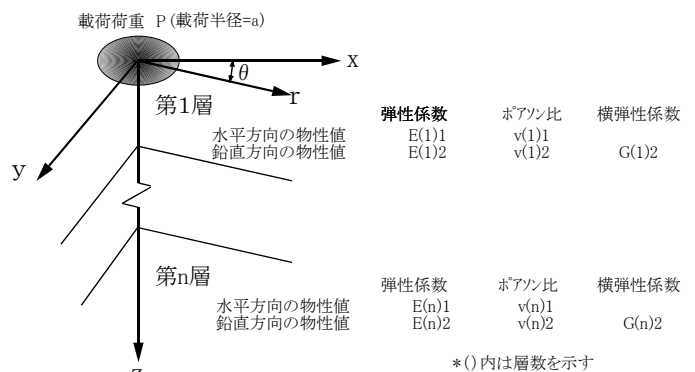


図-1 軸対象異方性多層弾性モデル

キーワード：直交異方性、軸対象、多層弾性解析、ハンケル変換

連絡先：330-0394 埼玉県比企郡鳩山町大字石坂 TEL：0492(96)5731 内線(2734), FAX：0492(96)6501

表-1 GAMES との比較 (誤差=異方性プログラム解析値 / GAMES 解析値)

	着目層	X	Y	Z	Ux(X方向変位)			Uz(Z方向変位)			σ_z (Z方向変位)		
					異方性 プログラム	GAMES	誤差	異方性 プログラム	GAMES	誤差	異方性 プログラム	GAMES	誤差
単位	-	mm	mm	mm	mm	mm	-	mm	mm	-	MPa/mm ²	MPa/mm ²	-
解析位置-1	1層位置	0	0	0	0.0000	0.0000	1.00	1.9580	1.9584	1.00	-1.415	-1.415	1.00
解析位置-2	2層位置	0	0	200	0.0000	0.0000	1.00	1.8220	1.8218	1.00	-0.262	-0.262	1.00
解析位置-3	3層位置	0	0	400	0.0000	0.0000	1.00	1.4400	1.4404	1.00	-0.102	-0.102	1.00
解析位置-4	1層位置	900	0	0	-0.0871	-0.0849	1.03	0.6641	0.6470	1.03	-0.522	0.000	-53.20
解析位置-5	2層位置	900	0	200	0.0592	0.0553	1.07	0.6505	0.6483	1.00	-0.011	-0.006	1.80
解析位置-6	3層位置	900	0	400	0.1350	0.1349	1.00	0.6403	0.6408	1.00	-0.010	-0.010	0.99

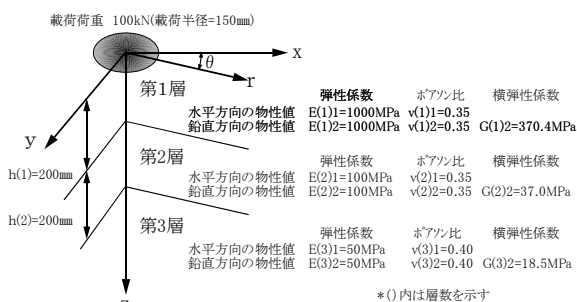


図-2 解析モデル図

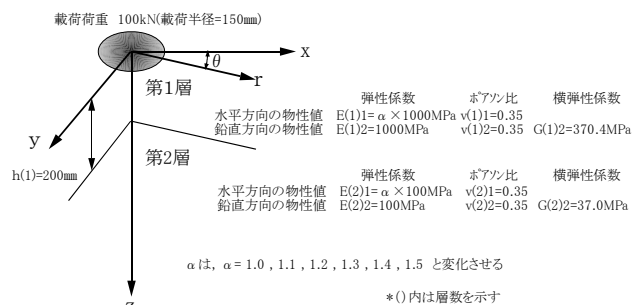


図-3 解析モデル図

なお、変位のハンケルの逆変換は、

$$u_r = \int_0^\infty \xi \tilde{u}_r J_1(\xi r) d\xi \quad (8-a)$$

$$u_z = \int_0^\infty \xi \tilde{u}_z J_0(\xi r) d\xi \quad (8-b)$$

この半無限積分の精度がプログラムの解析精度を左右する。DE 積分などの手法も考えられるが、本プログラムでは、ガウスの求積法にて解析している。

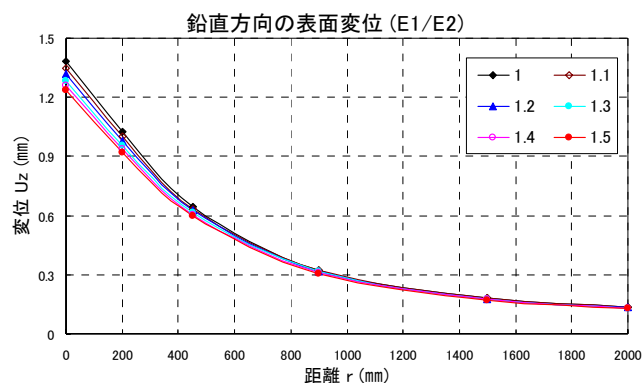


図-4 解析結果

3. 例題

(1) 等方性多層弾性プログラム(GAMES)との比較

本プログラムの解析精度の確認のため、GAMES の結果と比較する。解析モデルを図-2 に示し、結果を表-1 に記す。等方性のプログラムと比較するため、物性値を等方性とほぼ同じになるように入力して解析を行った。ほぼ同じと記述したのは、等方性の場合と異方性の場合とで、式(4)の微分方程式の解の形が異なる。等方性では、2 階の微分方程式を 2 乗した微分方程式で表記でき、式(6)の解と異なる。よって本プログラムでは、等方性多層構造の解析は出来ない。比較のための解析では、各層のポアソン比 v2 を 0.05 小さくして解析した。

変位は、GAMES とほぼ等しい結果を得た。応力は、解析位置-4 にて GAMES と値が異なっている。これは、ベッセル関数の積分精度の問題で理論の問題ではない。よって、応力も GAMES と比較的良く一致している。

(2) 異方性モデルの解析

図-3 に示したモデルにて解析した鉛直方向の変位を図-4 に記す。水平方向の剛度を上げれば、鉛直変位が小さくなっており、鉛直変位に対して直交異方性の影響が顕著である。

4. 結果

本研究にて以下の事が確認出来た。

1. 異方性の多層弾性プログラムの妥当性の確認。
2. 等方性の解析には、等方性時の微分方程式の解を用いなければ多層構造に対応出来ない。
3. 水平方向の弾性係数を固くすることで、鉛直変位は小さくなる。異方性が鉛直方向の変位に与える影響は顕著であり、弾性係数の逆解析時に与える影響は大きい。