

無限長レール・まくらぎ連成系における 波動伝播特性

新潟大学大学院

新潟大学工学部建設学科

新潟大学大学院自然科学研究科

学生員 古屋 卓稔

正会員 阿部 和久

正会員 紅露 一寛

1. はじめに

列車走行において、レールは振動発生源であり、その動的応答特性は全体系に影響を及ぼす。そのため、レールの振動特性に関する研究が多く、研究者によりなされてきた。

その際に、レールがまくらぎによって離散的に支持されていることから、周期性を有する構造系を解析するための手法である Floquet 変換¹⁾が有効な手法となる。しかし、当該手法を用いた過去の解析事例では、定式化の容易な Euler ばりに限定して議論がなされている。また、離散支持点においてまくらぎが考慮されておらず、レール・まくらぎ連成系での動特性には今だ未解明な点が存在する。

そこで、本研究ではレールを Timoshenko ばりで、まくらぎを質点でモデル化し、Floquet 変換援用の下、レール・まくらぎ連成系における伝播モードについて調べる。また、パッドの剛性が結果に及ぼす影響について考察する。

2. Floquet 変換の概要

$x \in \mathbb{R}$ で定義された非周期関数 $f(x)$ について、次式で与えられる $\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa)$ を $f(x)$ の Floquet 変換と呼ぶ。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x} + nL) e^{in\kappa L} \quad (1)$$

ここで、 $\tilde{x}$ は $(-L/2, L/2)$ の区間内の実数、 κ は $(-\pi/L, \pi/L)$ の区間内の実数である。なお、 κ を Floquet 波数と呼ぶ。また、 $\tilde{f}$ は $\tilde{x}$ について次の様な周期性 (第2種周期性) を有する。

$$\tilde{f}(\tilde{x} + L, \kappa) = e^{-i\kappa L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) \quad (2)$$

3. Floquet 変換による伝播モード解析

(1) レール・まくらぎのモデル化

レールは Timoshenko ばりでモデル化する。以降の解析では、レールたわみと断面回転角を変数に取り、前者を3次 Hermite 補間、後者を3節点2次補間で近似する TIM7 要素により離散近似する。

(2) 自由振動問題の Floquet 変換

解析領域を図-1における1ユニットで与える。無限軌道系の自由振動問題に Floquet 変換を適用すると、離散化の後、次式で与えられるような1ユニット当りの運動方程式を得る。

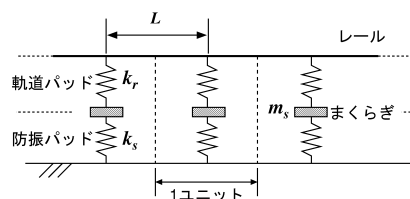


図 1 レール・まくらぎ系のモデル化

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{Bmatrix} \\ &= \omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 ω は円振動数、 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_3$ はユニットの左右レール端節点における節点変位より成る部分ベクトル、 $\tilde{u}_2$ はそれら以外の要素節点変位及びまくらぎ鉛直変位から成る部分ベクトルである。また、 $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ は仮想節点変位ベクトルであり、 $(-)$ は共役複素成分を意味する。 K_{ij}, M_{ij} は1ユニット当りの剛性行列と質量行列の部分行列である。

Floquet 変換の解 $\tilde{u}$ は式 (2) に示した第2種周期性を有する。第2種周期性を式 (3) に課すと次式を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_{11} + K_{33} + 2K_{13} \cos \kappa L & K_{12} + K_{23} e^{i\kappa L} \\ K_{21} + K_{23} e^{-i\kappa L} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} \\ &= \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} + M_{33} + 2M_{13} \cos \kappa L & M_{12} + M_{23} e^{i\kappa L} \\ M_{21} + M_{23} e^{-i\kappa L} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

最終的に得られる式 (4) を固有値問題として解き、Floquet 波数 κ に対する固有振動数 ω を求める。これより、レール・まくらぎ連成系におけるモードの伝播特性を調べることが可能となる。

4. 解析結果

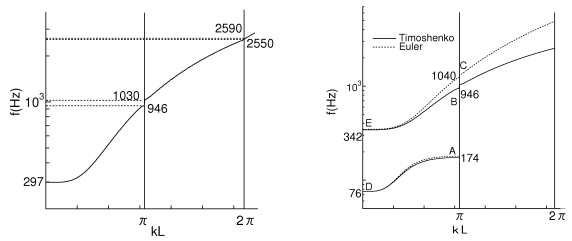
(1) 解析条件

まくらぎ間隔を $L=60\text{cm}$ とし、PC まくらぎを想定してレール1本当りの質量を $m_s=100\text{kg}$ と設定した。また、軌道パッドと防振パッドのバネ定数をそれぞれ $k_r=110\text{MN/m}$, $k_s=30\text{MN/m}$ としたものを以下の解析で用いる。

keywords : Floquet 変換, Timoshenko ばり

連絡先 : 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地

TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021



(a) バネ支持モデル (b) まくらぎ支持モデル

図2 各モデルにおける $k-f$ 曲線

レールは 50N レールを想定し、質量密度 $\rho = 7880 \text{ kg/m}^3$ 、断面積 $A = 64.05 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 、ヤング率 $E = 206 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.33$ 、せん断係数を 0.34 とした。与えた。

(2) 分散曲線とモード

レールをバネ支持 (a) した場合と、まくらぎで離散支持 (b) した場合における伝播モードの $k-f$ 曲線を図-2 に示す。なお、 k と f は Floquet 波数 κ より与えられるりを伝播する波動の波数と周波数である。図より伝播モードの存在しない周波数帯 (ストップ・バンド) が離散的に分布していることがわかる。また、(b) における周波数の最も低いパス・バンドに対応するモードが、(a) には存在していないことがわかる。なお、(b) には比較のため、レールを Euler ばりでモデル化した場合の結果も合わせて示した。Timoshenko ばりと Euler ばりとの違いは 500Hz 前後の周波数から顕著に現れ、周波数の増加と共に拡大している。

モード間の対応を確認するため、各ストップ・バンド端 A, B, C, での変位モードを図-3 に示す。B, C はまくらぎがほとんど変位しない伝播モードを与えている。一方、A ではまくらぎがレールたわみと同調して振動しており、レールとまくらぎとが連成したモードを示している。

A ではまくらぎがレールと共に大きく振動していることから、道床や地盤における振動の発生がこのモードと密接に関連しているものと考えられる。特に道床・地盤系の振動応答は一般に 30~70Hz にピークを持つことから、本モードにおける下端 (D 点) 近傍での軌道振動がそれに影響している可能性が高い。そこで $k=0$ におけるバンド端 D 点での変位モードを、E 点でのものと合わせ図-4 に示す。図より、D でのモードではレールにほとんど曲げたわみが生じておらず、レールとまくらぎとが一体となって上下に振動していることがわかる。なお、まくらぎ振動により防振パッドが伸縮することから、まくらぎ・道床間の作用力が大きく変動し、地盤振動の発生につながっているものと考えられる。

(3) パッド類の剛性が結果に及ぼす影響

軌道パッドと防振パッドのバネ定数 k_r , k_s が伝播モードに及ぼす影響について調べる。ここでは、実際の軌道で用いられているパッド類のバネ定数を参考に、

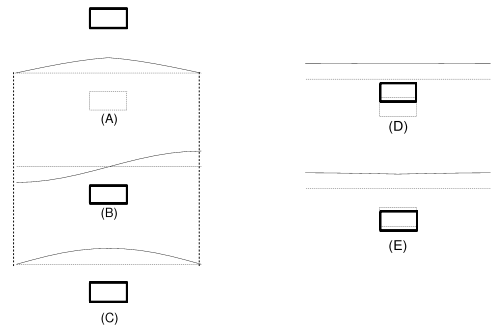
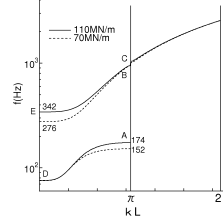
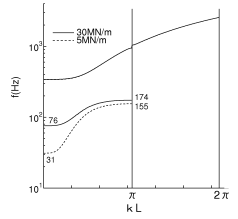


図3 A, B, C での変位モード

図4 D, E での変位モード



(a) Case1: 軌道パッド



(b) Case2: 防振パッド

図5 パッドの変更による $k-f$ 曲線の変化

Case1: $k_r = 70 \text{ MN/m}$ 、および Case2: $k_s = 5 \text{ MN/m}$ とした 2 ケースについて検討する。

結果を図-5 に示す。レールとまくらぎとが振動する最低周波数バンドにおける小さな波数域では、レールとまくらぎが一体化して振動しているため、軌道パッドの剛性が結果にほとんど影響していない。一方、2 番目のパス・バンドにおけるモードでは、 $k=0$ 付近で顕著な差が認められる。またストップ・バンド上端 C 付近でも、わずかではあるが振動数低下を生じている。E でのモードと C でのモードは、いずれもまくらぎ下がほとんど振動せず起動パッドが伸縮するため、これらのモード付近において軌道パッドの剛性変化の影響が現れたものと思われる。一方、まくらぎ位置が節となって振動するモード B では、まくらぎ位置でレールのたわみがゼロとなるため、パッドの剛性は結果に全く影響しない。

次に、Case2 の場合では最低周波数バンドに差異が認められる。このことより、道床・地盤系に伝わる振動エネルギーの制御には、防振パッドのバネ定数の調整が重要な役割を持つことがわかる。

5. おわりに

Floquet 変換を用いてレールとまくらぎから構成される無限軌道系における波動伝播モードについて調べた。解析の結果、伝播モードは、レールと軌道パッドより成る系のモードと、レールに加えまくらぎも大きく変位するモードの 2 つに分類されることが分かった。

参考文献

- 1) Mead, D.J.: Free wave propagation in periodically supported, infinite beams, *J. Sound Vib.*, **11**, 181-197, 1970.