# 都市の集積・分散モデルと その分岐解析に関する研究

東北大学　学生会員　○八巻俊二
東北大学　正会員　池田清宏
東北大学　正会員　赤松隆
東北大学　正会員　河野達仁
東北大学　学生会員　柳本彰仁

## 1.　研究背景と目的

都市集積現象のメカニズムを表現した代表例である Krugman[1)] モデルは複数の均衡解を持ち，その集積状態の創発はパタメータ空間 (総人口，交通費用等) での分岐を伴うことが知られている．しかし，その集積・分散の仕組みは，地域 (都市) 数が 2 と 3 の場合しか明らかにされていない．そのため，都市数が更に増加した場合における人口の空間的 (地域・都市間) 集積・分散パターンに関して十分な研究が行われているとは言えない状況である．そこで，本論文の目的は，このモデルを全く同一の人口を持つ $n(=3,4,\cdots,2^k)$ 都市モデルへと拡張し，分岐理論[3)]を用いることにより，均衡解の分岐のメカニズムを数値的に解明する．変化させるパラメータは輸送費の変化であり，都市数の増加に伴なう都市数の集積・分散特性を分岐解析結果に基づき分析する．

## 2.　都市の集積・分散モデル

### (1)　一般均衡の枠組み

Krugman モデルは，下記の仮定に基づいている．

- 経済は，独占的競争の行われる工業部門と完全競争的な農業部門の 2 部門からなる．
- 経済全体では工業労働者は $\mu$，農業労働者は $(1-\mu)$ 存在する．
- 農業労働者は，各地域には均等に分布している．地域間の移動は不可能である．
- 工業労働者は自身の効用を最大化するように自由に都市間を移動することができ，地域 $r$ の工業労働者の名目賃金および実質賃金をそれぞれ $w_r^M$，$\omega_r^M$ で表す．
- 農業労働者は移動不可能で，すべての都市に均等に分布しており，賃金 1 である．
- 工業品の輸送には輸送費がかかり，農業品の輸送には輸送費はかからないこととする．

### (2)　都市人口の配置とモデルの定式化

$n$ 都市における人口をある 1 都市から順に $\lambda_1$,$\lambda_2$, $\lambda_3$，$\cdots$,$\lambda_n$ と円周に沿って等間隔に配置する．また，都市 $r$ から都市 $s$ までの工業品輸送費 $T_{rs}$ は，ある一定値 $\tau$ と都市間の短い方の距離で決定される指数関数で表現すると定義し，$T_{rs}\in(0,1]$ とする．

更に，消費者の効用最大化行動，生産者の利潤最大化行動，氷塊輸送を考慮したこの Krugman モデルにおいて，非線形連立方程式は以下のように定式化される．

$$[\sum_{s=1}^{n} Y_s T_{is}^{1-\sigma} G_s^{\sigma-1}] - w_i^{\sigma} = 0 \tag{1}$$

$$(\bar{\omega}-\omega_i)\lambda_i = 0 \tag{2}$$

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1=0 \tag{3}$$

$$\bar{\omega}-\omega_i \geq 0 \quad \lambda_i \geq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

ここで，式 (1) において，$Y_r=\mu\lambda_r w_r+(1-\mu)/n$, $G_r=[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(w_sT_{sr})^{1-\sigma}]^{1/(1-\sigma)}$ であり，式 (4) は相補性条件式であり，各変数の意味は下記の通りである．

$\omega_r=w_rG_r^{-\mu}$：都市 $r$ の工業労働者の実質賃金
$\bar{\omega}$：均衡実質賃金
$\lambda_r\in[0,1]$：都市 $r$ における工業人口全体に対する割合
$Y_r$：都市 $r$ の所得
$w_r$：都市 $r$ における工業労働者の賃金
$\mu\in(0,1]$：工業品への支出割合
$G_r$: 都市 $r$ の工業品価格指数
$\sigma\in[1,+\infty]$：任意の差別化された 2 財間の代替弾力性

## 3.　分岐理論とモデルへの適用

### (1)　計算分岐理論

式 (1)–(3) において，未知変数 $\boldsymbol{u}$ とパラメータ $f$ を，

$$\boldsymbol{u}=(w_1,\ldots,w_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\bar{\omega})^T, \quad f=\tau \tag{5}$$

と取り，非線形連立方程式 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},f)$ を誘導し，Newton-Raphson 法を用いて，平衡解 $(\boldsymbol{u},f)$ を求めていく．また，増分支配方程式から求まるヤコビ行列 ( $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u},f)=\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{u}$ ) の固有値解析により，固有値が

**Key Words: Krugman モデル，計算分岐理論，群論的分岐理論，都市の集積・分散**
〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06-6-061 Phone: 022-795-7420; FAX: 022-795-7418

全て負の場合を安定解とし，式 (1) の平衡解より，不等式条件 (4) を満足するものを実際には採用する．ただし，全都市の人口が一様に増加する固有ベクトルとその固有値は人口一定条件 (3) を満たさない解として除外する．数値解析法の詳細は，池田他に譲る[3]．

### (2) 群論的分岐理論

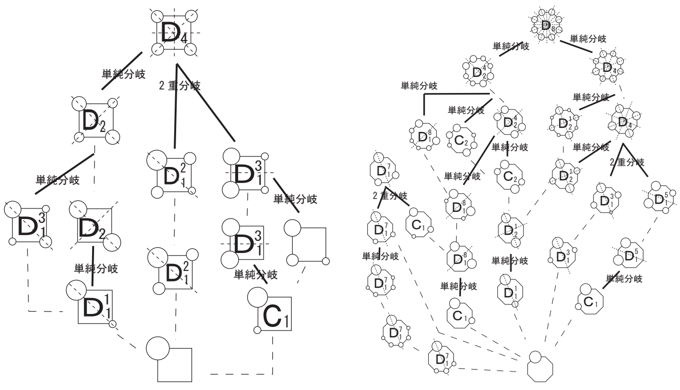
本研究で扱うモデルは $n$ 個の都市が円周に沿って等間隔に存在する状況を考えているので，正 $n$ 角形状の対称性を表す 2 面体群 $G = \mathrm{D}_n$ が対称群となる 2 面体群 $\mathrm{D}_n$ は

$$\mathrm{D}_n = \{e, r_n, \ldots, r_n^{n-1}, s, sr_n, \ldots, sr_n^{n-1}\} \quad (6)$$

と定義される．ここでこの式の右辺の各要素は下記の幾何学的対称性を表す座標変換である．

- 何も操作しない変換：$e$
- 正 $n$ 角形の中心のまわりに反時計方向に $2\pi/n$ 回転する変換：$r_n$ ($r_n^i$:変換を $i$ 回行う)
- 軸上に鏡を置いて映した像への変換：$s$

図 1 は，$n = 4, 8$ の場合に対して，対称性の喪失を伴う分岐の仕組みを示すものである．この種の図より，人口が $n$ 都市に分布している状態から一極集中するまでの分岐過程の仕組みを知ることができる．




($n = 4$ の場合) ($n = 8$ の場合)

**図–1** 群論的分岐理論

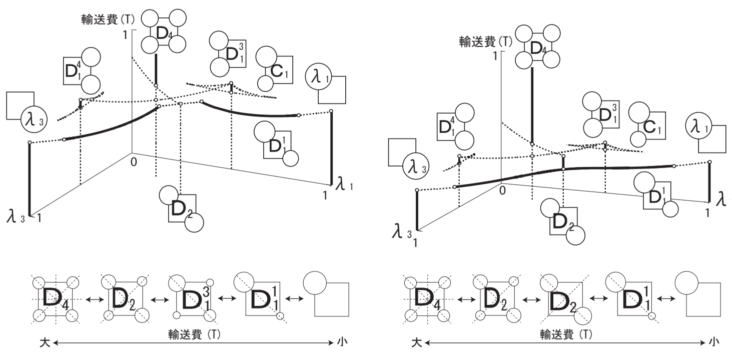
## 4. 都市の集積解析結果

### (1) 4 都市の場合の対称性破壊分岐

例として 4 都市を取り上げる．都市 1，2 の人口 $\lambda_1$，$\lambda_2$ と輸送費 $T$ との関係を図 2 に示す．安定解を黒の実線，平衡解において不等式条件 (4) を満たす解を黒の破線で示した．また，人口比率の大きさを○の面積で表現し，経路上の白丸は分岐点である．『新しい空間経済学』[1] に基づき，パラメータ $\mu = 0.4$ に固定し，$\sigma$ の値を変化させ解析を行った．$\sigma = 5.0, 10.0$ ともに 4 都市に同一の人口を持つ状態である $\mathrm{D}_4$ から対称性を順次喪失し，1 都市への集積を起こしており，図 1 の左側に示した規則に従っている．しかし，対称性という観点から，両者は異なる分岐経路であることが判明した．$\sigma = 5.0$ の場合，$\mathrm{D}_2$ における 2 都市均衡の安定解が存在せず，$\mathrm{D}_1^3$ へと分岐し，$\sigma = 10.0$ の場合には $\mathrm{D}_1^3$ は存在せず，$\mathrm{D}_2$ の 2 都市安定解へと分岐が発生している．

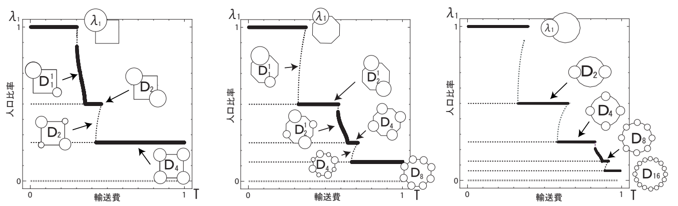
### (2) 周期倍分岐

パラメータ ($\mu$,$\sigma$) の値を変化させ，全く同一の人口を持つ $n$ 都市から一極集中に至る分岐経路の中において，不等式条件 (4) を満たす経路を取り上げると，輸送費が減少するにつれ，系の状態が (16 都市 ↔8 都市 ↔4 都市 ↔2 都市 ↔1 都市) と周期を倍にしながら分岐現象が発生する．この現象は周期倍分岐と呼ばれ，都市が集積・分散現象はこれに従うことが明らかにされた．$(\mu, \sigma) = (0.4, 10.0)$ の周期倍分岐の発生例を図 3 に示すとともに 16 都市における周期倍分岐の例を示す．

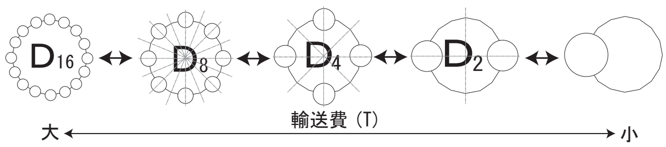



($\sigma = 5.0$ の場合) ($\sigma = 10.0$ の場合)

**図–2** 4 都市における解析結果




(4 都市) (8 都市) (16 都市)




**図–3** 周期倍分岐

### 参考文献

1) M. Fujita, P. Krugman,and A.J. Venables, The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade, MIT Press, 1999.
2) A.K. Dixit, and J.E. Stiglitz, Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, American Economic Review, 67(3). pp.297–308, 1997.
3) 藤井文夫，大崎純，池田清宏, 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ 3, コロナ社, 2005.