確率場の条件付及び非条件付局所平均値推定とその地盤パラメータ推定への応用

岐阜大学 正会員 ○本城 勇介

1 はじめに

最近各種の設計基準が，限界状態設計法の考え方に基いて改定されているが，その中で，地盤パラメータ特性値の決定方法や，これを決定するのに必要なサンプル数の議論が多い．

本研究では，特性値は地盤のある体積についての平均値（＝局所平均値）であるという考え方を取り（Vanmarcke,1977），調査されたその位置における同一層内の特性値の推定を条件付推定(CE)と呼び，また調査に基いて同一層内の任意位置における局所平均を推定する場合を非条件付推定(NCE)として，この2者の推定分散の違いに注目して，それぞれの推定分散関数を導いた．これに基き，与えられた情報の元における信頼性のある特性値の決定方法，また必要なサンプル数について提案した．

本研究の特徴は，地盤調査が行われたその地点の特性値を問題にするのか，あるいは調査が行われた土層の任意点での特性値を問題にしているのかを明確に分けて定式化した点にある．

この発表では問題を簡単化するため，ある層は定常な一次元確率場としてモデル化でき，また厚さLの土層から等間隔(=L/n)でn個のサンプルを取るとしている．

2 局所平均推定値の分散関数

局所平均は，その確率場の性質により，平均値とかなり異なる値をとり得る．それは，確率場の自己相関距離θと局所平均を考えている長さLの相対的な大きなに依存する．この研究では，この関係を次の正規化層厚L_n により表す：

$$L_n = \frac{L}{\theta} \tag{1}$$

非条件付局所平均推定値(NCE)の推定分散は，次式により定義できる．なお，サンプル値の算術平均として定義された推定量の，期待値は定常確率場の平均値である．

$$s_{LNC}^2\left(n,L_n\right) = E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X(z_i)-\mu\right\}^2\right] \tag{2}$$

一方，条件付局所平均推定値（CE）の推定分散は，次式により定義できる：

$$s_{LC}^2\left(n,L_n\right) = E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X(z_i)-\tfrac{1}{L}\int_0^L X(z)dz\right\}^2\right] \tag{3}$$

S_{LNC}^2 や S_{LC}^2 は，単にサンプル数nの関数であるばかりでなく，正規化層厚 L_n, の関数でもある点は注意を要する．

この研究では，NCEの推定分散を，NCE分散関数$\Lambda_{NC}^2(n,L_n)$により表すことを提案する：

$$s_{LNC}^2 == \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov\left[X(z_i)X(z_j)\right] = \sigma^2\Lambda_{NC}^2(n,L_n)$$

従って，$\Lambda_{NC}(n,L_n)$ は，次式のようになる：

$$\begin{aligned}\Lambda_{NC}^2(n,L_n) &= \frac{s_{LNC}^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{n^2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov\left[X(z_i)X(z_j)\right]\end{aligned} \tag{4}$$

次の関係が存在することは，興味深い：

$$\begin{aligned}&\lim_{L_n\to o}\Lambda_{NC}^2(n,L_n) = 1.0 \\ &\lim_{L_n\to\infty}\Lambda_{NC}^2(n,L_n) = \frac{1}{n}\end{aligned} \tag{5}$$

同様に，CE の推定分散を，CE 分散関数$\Lambda_C^2(n,L_n)$により表す:

$$s_{LC}^2(n,L_n) = \sigma^2\Lambda_C^2(n,L_n) \tag{6}$$

ここに，

$$\Lambda_C^2(n,L_n) = \Lambda_{NC}^2(n,L_n) - \frac{2}{nL}\sum_{i=1}^{n}c\left(z_i\right) + \Gamma^2\left(L\right) \tag{7}$$

さらに，$c(z_i)$ は，指数型の自己相関関数を仮定すると，次のように与えられる：

$$c\left(z_i\right) = 2\theta - \theta\exp\left(-\tfrac{z_i}{\theta}\right) - \theta\exp\left(-\tfrac{L-z_i}{\theta}\right)$$

なお，Γ^2は Vanmarcke(1977)が定義した分散関数である．.次の結果は，興味深い：

$$\begin{aligned}&\lim_{L_n\to o}\Lambda_C^2(n,L_n) = 0 \\ &\lim_{L_n\to\infty}\Lambda_{NC}^2(n,L_n) = \frac{1}{n}\end{aligned} \tag{8}$$

$\Lambda_{NC}^2(n,L_n)$と$\Lambda_C^2(n,L_n)$)を，n= 2, 4, 8 と16について，L_n=L/θ を0.5から100まで変化させて計算したのがFigure.1である．次の事が観察できる．

(1) NCEでは，L_nがゼロに近いとき1.0であり，CEでは0.0である．すなわち，このような状態ではNCEの推定分散は大きいが，CEの分散はきわめて小さく，正確な推定ができることがわかる．

(2) 一方L_nが大きくなると，NCEもCEも1/nに近づく．これは，サンプルをいわゆる同一独立な分布(*i.i.d.*)に従う母集団からとった場合で，伝統的な統計学の示すとおりの結果である．

以上のように，NCE及びCE分散関数が，特に正規化層厚が，小さいとき全く異なる挙動を示すことは，地盤パラメータの推定の問題にも少なからぬ示唆を与える．

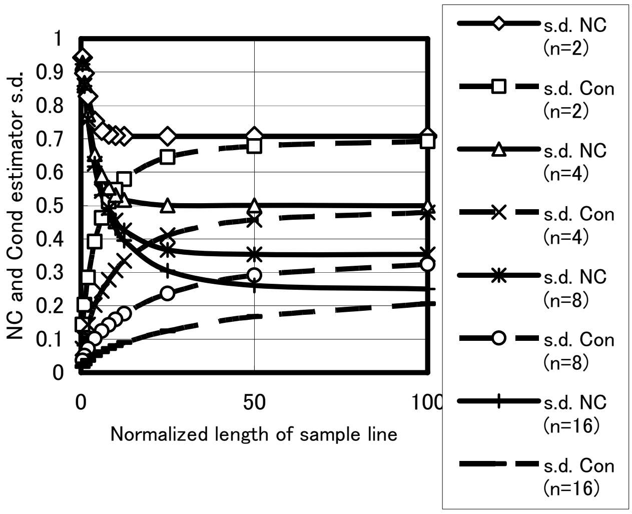

Figure 1 s.d. and normalized length of sample line relationship for NCE and CE

3 特性値やサンプル数の決定への応用

特性値の決定法や，必要なサンプル数の決定は，伝統的な統計学を用いて，主に区間推定の考え方を元に行われてきた（Lumb,1974）. そこでは，サンプルが*i.i.d.*に従い，従って推定分散は，1/nで低減すると仮定された.

伝統的な統計学のこの1/nを，前節で導入したNCE及びCE分散関数に置き換えることにより，これらの問題に，解を与えることができる.

特性値の決定の一例として，ここではEurocode7の解説書，Orr and Farrel (1999) により示された例題を取上げた． これは，約10m層厚の均質な砂地盤で，10個の供試体についての三軸試験による内部摩擦角の特性値を決定する問題である.

特性値は，サンプル数，正規化層厚，COV及び設定された有意水準αにより，次のように決定できる:

$$\phi_{kNC} = \bar{\phi}\left(1 - z_\alpha \cdot \Lambda_{NC}\left(n, L_n\right) \cdot COV\right)$$

$$\phi_{kC} = \bar{\phi}\left(1 - z_\alpha \cdot \Lambda_{C}\left(n, L_n\right) \cdot COV\right)$$

決定の結果は，いろいろなパラメータの組合せに関してTable1のようになった.

一方，必要なサンプル数 n についても，信頼性区間の考え方を応用して，決定することができる. Table2 は，その計算の一例である.

Table 1 Result of characteristic value estimation

θ (m) / L_n	1.67 / 6	0.8 / 12.5	0.4 / 25	0 / *i.i.d.*
Λ_{NC} (n=10, L_n)	0.538	0.411	0.341	0.316
Λ_{C} (n=10, L_n)	0.100	0.142	0.194	0.316
NCE α=0.05 lower bound	32.0	32.5	32.9	33.0
CE α=0.05 lower bound	33.9	33.8	33.5	33.0

Table 2 Necessary sample size for one sided confidence interval with significance level .

α	NCE /CE	Δ	Normalized Sample Length (L_n) 0.1	0.5	1.0	10	100	∞ (*i.i.d*)
0.05 (z= 1.645)	NCE	0.2	NP	NP	NP	NP	NP	63
		0.5	NP	NP	NP	NP	11	11
		1.0	NP	NP	NP	3	3	3
	CE	0.2	1	3	5	11	31	63
		0.5	1	1	2	5	9	11
		1.0	1	1	1	2	3	3

(Note) NP implies the estimation is not possible within sample size of 50.

この表より分かるように，NCEであるか，CEであるかにより，特に正規化層厚が短いとき，必要なサンプル数は全く異なる．さらにNCEでは，層内任意点の局所平均値の推定は，一つの観測線（=ボーリング）のみからのサンプルでは不可能な場合があることを示している．このような時は，充分離れて相関がないと思われる地点で，さらに観測線(=ボーリング)を追加する必要がある.

4 むすび

本研究では，地盤パラメータの特性値は局所平均値により求められると言う前提のもとに，観測したその場所の局所平均値を推定する条件付推定(CE)と，土層の任意地点の局所平均値を推定する非条件付推定(NCE)に着目し，それらの推定量の分散関数を導いた．それらの本質的特徴は，求められた$\Lambda^2_{NC}(n, L_n)$と$\Lambda^2_{C}(n, L_n)$に，込められている.

これらの挙動は，特に正規化層厚の短いとき，非常に異なる．これは，地盤工学の実務や，設計コードで特性値の決定法を定めるときにも留意しなければならない重要な視点を提供している.

参考文献

CEN 2004, EN1997-7: *Eurocode7: Geotechnical Design, Part1: General Rules.*

Honjo, Y. 2007: On conditional and non-conditional estimation of local average and their applications in geotechnical parameter estimations, Georisk (投稿済)

Lumb, P. 1974, Application of Statistics in Soil Mechanics, *Soil Mechanics – New Horizon* (edited by Lee, I.K.), pp. 44 – 110, Newness Butterworths, London.

永井靖 2003: サンプルサイズの決め方，朝倉書店.

Orr, T.L.L. and E.R. Farrell 1999, *Geotechnical Design to Eurocode 7*, Springer – Verlag, London.

Vanmarcke, E.H. 1977, Probabilistic modeling of soil profiles, *Journal of Geotechnical Engineering (ASCE)*, Vol.103, No. GT11, pp.1227-1246.