

随伴方程式法を用いた弾性係数の同定

佐藤工業株式会社 正会員 小泉 直人
中央大学 正会員 川原 陸人

1. はじめに

トンネルやダムをはじめとする岩盤掘削では、事前地質調査により設計が行われる。しかし全体の地質性状を正確に把握することは難しく、施工中に設計変更を伴うことが多い。

本研究の随伴方程式法を用いた弾性係数の同定は、有限要素法を用いた動的弾性体解析により、掘削地山の弾性係数を予測する手法である。

二ツ石ダム(宮城県)土取場において、発破掘削時に発生する地表面の発破振動を測定し、逆解析を行い、岩盤の弾性係数を同定し、本手法の妥当性を検証した。

2. 有限要素方程式

地山状態を表す基礎方程式として3次元動的弾性体の有限要素方程式を用い、Galerkin法を適用することにより、有限要素近似を行う。以下の式では総和規約を用いて表示する。

$$M_{i\alpha k\beta} \ddot{x}_{k\beta} + C_{i\alpha k\beta} \dot{x}_{k\beta} + K_{i\alpha k\beta} x_{k\beta} = F_{i\alpha}, \quad (1)$$

$$M_{i\alpha k\beta} = \int_V (N_{\alpha p} N_{\beta}) dV, \quad (2)$$

$$K_{i\alpha k\beta} = \int_V (N_{\alpha, j} D_{ijkl} N_{\beta, i}) dV, \quad (3)$$

$$C_{i\alpha k\beta} = \alpha_0 M_{\alpha\beta} + \alpha_1 K_{i\alpha k\beta}, \quad (4)$$

$$F_{i\alpha} = \int_V (N_{\alpha p} \rho b_i) dV - \int_{ST} (N_{\alpha i} t_i) dS \quad (5)$$

但し、 D_{ijkl} は弾性応力-ひずみマトリックスであり以下の式で表される。

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7)$$

3. 評価関数

振動速度データ \dot{x} を用い、地山の弾性係数を目的関数として同定する。計算で求めた解析値 \dot{x} と計測値 \dot{x}^* の差の二乗和で構成される評価関数を設定し、この評価関数を最小にするように目的関数(弾性係数)を決定する。

$$J = \frac{1}{2} \int_V \int_V (\dot{x}_i - \dot{x}_i^*) W_{ij} (\dot{x}_j - \dot{x}_j^*) dV dt. \quad (8)$$

評価関数の勾配を求めるために有限要素方程式にLagrange乗数をかけた拡張評価関数を導出し拡張評価関数の勾配を求めることにより、評価関数の勾配の代替として扱い、目的係数の同定を行う。拡張された評価関数は、下式で表される。

$$J^* = \frac{1}{2} \int_V \int_V (\dot{x} - \dot{x}_i^*) W_{ij} (\dot{x}_j - \dot{x}_j^*) dV dt + \int_V \int_V \lambda_i^T (\sigma_{ij, j} - \rho b_i - \rho \dot{x}_i) dV dt. \quad (9)$$

拡張評価関数の第一変分を取る事により評価関数の勾配を得ることができる。

4. 重み勾配法

最小問題を解くために重み勾配法を適用した。

$$K = J^* + \int_t (X^{(n+1)} - X^{(n)}) W (X^{(n+1)} - X^{(n)}) dt. \quad (10)$$

ここで、 n は繰返し計算回数、 X は同定された弾性係数である。修正拡張評価関数の両辺を弾性係数で微分することにより弾性係数を導出することができる。更新式は以下のとおりである。

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \text{grad}(J^*) / W. \quad (11)$$

$\text{grad}(J^*)$ は評価関数の勾配である。

5. 随伴方程式法

本研究では弾性係数を同定するために随伴方程式を適用した。随伴方程式とは、状態方程式に対して、随伴方程式を誘導して解析を進める方法である。拡張された評価関数の第一変分をゼロに取ることにより、随伴方程式、終端条件、評価関数の勾配を得ることができる。得られた随伴方程式は、以下のように表される。

$$M_{i\alpha k\beta} \ddot{\lambda}_{k\beta} - C_{i\alpha k\beta} \dot{\lambda}_{k\beta} + K_{i\alpha k\beta} \lambda_{k\beta} + (\dot{x}_{i\alpha} - \dot{x}_i^*) W_{i\alpha j\beta} = 0 \quad (12)$$

逆解析を解くためには、順解析での初期条件として、終端条件が必要である。終端条件は、拡張評価関数の第一変分により、以下の式が得られる。

Key Word: 逆解析 随伴方程式

〒103-8639 東京都中央区日本橋本町 4-12-19 Tel 03-3661-4794 Fax 03-3668-9484

$$\lambda_{i\alpha}(t_f) = 0 \quad (13)$$

$$M_{i\alpha k\beta} \dot{\lambda}_{k\beta}(t_f) + (\ddot{x}_{i\alpha}(t_f) - \ddot{x}_i^* \alpha(t_f)) W_{i\alpha j\beta} = 0 \quad (14)$$

$\ddot{\lambda}(t_f)$ は式(13)、(14)を式(12)に代入することにより求めることができる。弾性係数の勾配は以下のように表すことができる。

$$grad(J^*) = \lambda_{i\alpha} K_{i\alpha k\beta}^* (\alpha_1 \dot{x}_{k\beta} + x_{k\beta}) \quad (15)$$

この勾配を用い弾性係数の同定を行う。

K^* は式(3)をそれぞれの層の弾性係数で偏微分したものである。

6. 数値解析事例

ニツ石ダム(宮城県)土取場の弾性係数を同定した。

図-1に3次元四面体要素を用いた有限要素分割図と観測点の位置を示す。地山等級は、CM級であり、中央にCL級層を挟む。観測点は、発破位置から約80m離れた地点とし、CL層を挟み両側に設置した。

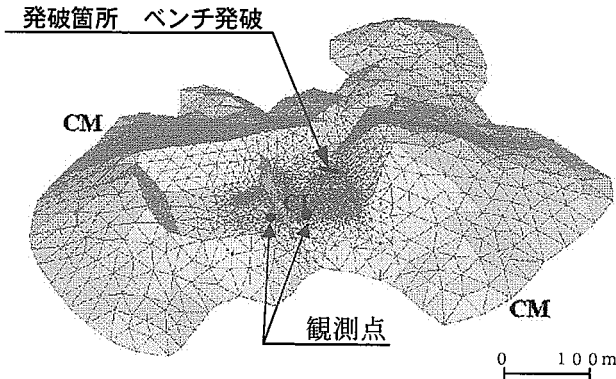


図-1 有限要素分割図

図-2は、繰り返し計算ごとの評価関数の履歴を示している。

【解析条件】

発破外力: $1.7 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu: 0.3$, $\alpha_0: 0.005$

$\alpha_1: 0.00033$, 岩盤密度: 2.3 g/cm^3

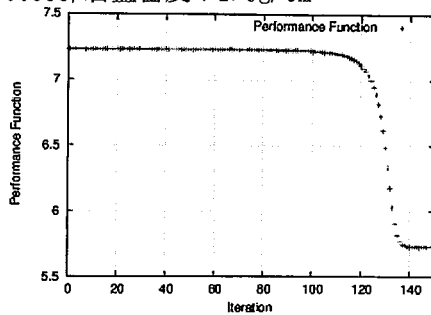


図-2 評価関数の履歴

図-3に弾性係数の履歴を示す。

弾性係数の同定解析でのCL、CM級地山の初期値はともに $5.0 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ と設定した。

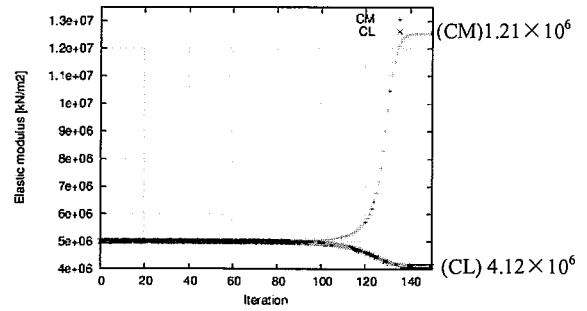


図-3 弾性係数の履歴

表-1 同定解析の結果とニツ石ダム地山弾性係数の比較

	CL	CM
弾性波 (km/s)	0.6~1.0	1.0~2.1
地山弾性係数 (kN/m ²)	$\sim 1.0 \times 10^7$	$1.0 \times 10^7 \sim 2.5 \times 10^7$
同定結果 (kN/m ²)	4.12×10^6	1.21×10^7

地山弾性係数：ニツ石ダム地質調査結果

図-4に、観測データと計算値の発破振動の比較を示す。

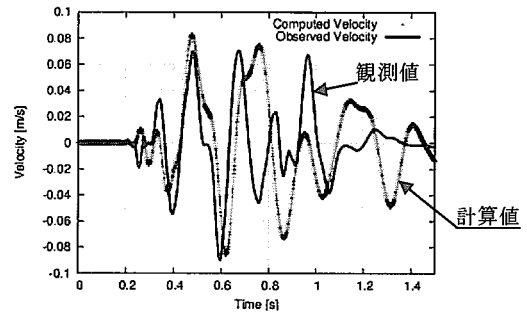


図-4 発破振動観測値と計算値の比較

7. まとめ

弾性係数は表-1に示すとおりニツ石ダムの岩盤等級に相応した値がえられた。発破振動は、図-4に示すとおり観測値と類似した結果が得られた。今回の事例は、比較的岩盤状態もよく、計算値と調査データ(観測値)は、類似値を得られたものと考えられる。解析領域、発破力、岩盤状態等を変化させ、解析精度の向上を図ることが今後の課題と考える。

謝辞：本研究に当り、東北農政局ニツ石ダム事務所、観測及び解析にご助力をいただいた中央大学理工学部応用力学研究室の皆様に深く感謝いたします。

参考文献

1. 川原陸人: 随伴方程式による逆解析について応用力学論文集 VO 1.8 (2005年8月)
2. FAKHIMI, A, MOJTABAI, N and SALEHI, D: Numerical Back Analysis for Estimation of soil Parameters in the Resalat Tunnel project
3. DENG, D, NGUYEN-MINH, D: Identification of Rock Mass Properties in Elast-Plasticity
4. SWOBODA, G, DONG, Q, DOLEZALOVA, M and VENCLI, KP: Back Analysis of Three Dimensional Model for Geotechnical Problems