

3次元解析に用いる簡易な非線形弾性構成則

清水建設(株) 正会員 ○石川 明

1. 目的

現在、地盤の構成則は、弾塑性構成則が盛んに研究されている一方で、実務解析では、双曲線や指数関数を用いた非線形構成則が用いられることも多い。例えば、静的な変形解析(即時沈下解析)では Duncan-chang モデル¹⁾、実測結果に基づくモデル^{2),3)}、動的解析では Ramberg-Osgood モデルや Hardin-Drnevich モデルなどである。これらの構成則は、①解析の対象とする特定の目的に対しては十分な精度が得られること、②簡便なこと、③地盤調査結果からパラメーターの決定が容易なこと、などの点で利点がある。しかし、いずれも1次元もしくは軸対称モデルとして記述された構成則のため、3次元の地盤挙動を解析する際には3次元的な拡張が必要となる。このような背景から、本研究では、Duncan-chang モデルをベースとした双曲関数型の3次元構成則を提案した。

2. 提案する構成則

2. 1 Duncan-chang モデルと提案する構成則作成の方針

Duncan と Chang によるモデルの特徴は以下に表すことができる⁴⁾。

① 軸差応力 $\sigma^{(1)} - \sigma^{(3)}$ と軸ひずみ $\varepsilon^{(1)}$ の関係に双曲線モデルを用いている。

$$(\sigma^{(1)} - \sigma^{(3)}) = \frac{\varepsilon^{(1)}}{a + b\varepsilon^{(1)}} \quad (1) \quad \text{ここに、} a = \frac{1}{E_i}, b = \left(\frac{R_f}{(\sigma^{(1)} - \sigma^{(3)})_f} \right) \quad (\sigma^{(1)} - \sigma^{(3)})_f \text{ 破壊時の軸差応力}$$

② 拘束応力として最小主応力 $\sigma^{(3)}$ を用いており、初期剛性は $\sigma^{(3)}$ に依存する。

③ 圧縮強度として Mohr-Coulomb の破壊基準を用いている。

④ 接線剛性 E_t を応力比の関数として表している。

これに対して、提案する3次元構成則は以下の点を変更する。

⑤ 拘束圧を最小主応力 $\sigma^{(3)}$ ではなく平均主応力 σ_m とする。

⑥ ①、⑤より、(1)式左辺は $\sigma^{(1)} - \sigma_m = s^{(1)}$ (主偏差応力) となる。(1)式右辺の軸ひずみ $\varepsilon^{(1)}$ は、主偏差応力 $s^{(1)}$ に対応する主偏差ひずみ $e^{(1)}$ とし、各主方向で(1)式的双曲線関係をみたすとする。

⑦ 全ひずみ ε_{ij} に対する接線剛性 a_{ijkl} の算出を可能とするため、応力 σ_{ij} をひずみの関数として記述する。そのため、体積弾性係数 K 、せん断剛性 G をひずみの関数として記述する。

2. 2 提案する構成則

(2)式は、⑦にもとづいて体積弾性係数 K と体積ひずみ ε_v の関係を示したものである。体積圧縮するほど地盤剛性が固くなることを示しており、地盤剛性の拘束圧依存性を表している。

$$K = \bar{K} \left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vf}} \right)^m + K_0 \quad (2) \quad \text{ここに、} K_0 : \text{初期体積弾性係数}, \bar{K}, \varepsilon_{vf}, m : \text{定数}$$

(2)式より、せん断剛性 G 、平均主応力 σ_m は(3)、(4)式となる。

$$G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left(\bar{K} \left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vf}} \right)^m + K_0 \right) = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \bar{K} \left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vf}} \right)^m + G_0 \quad (3)$$

$$\sigma_m = K \varepsilon_v = \left(\bar{K} \left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vf}} \right)^m + K_0 \right) \varepsilon_v \quad (4)$$

キーワード 非線形、構成則、数値解析、静的問題

連絡先 〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設技術研究所 TEL 03-3820-8267, e-mail akira.ishikawa@shimz.co.jp

(5) 式は、①、⑥より、各主偏差方向の主偏差応力 $s^{(\alpha)}$ と主偏差ひずみ $\varepsilon^{(\alpha)}$ の関係を示したものである。

$$s^{(\alpha)} = \frac{e^{(\alpha)}}{a + be^{(\alpha)}} \quad (5) \quad \text{ここに、} a = \frac{1}{G}, b = \frac{R_f}{\tau_{\max}}$$

$\tau_{\max}$ は破壊時のせん断応力を表し、Mohr-Coulomb の破壊基準として以下の式で表される。

$$\tau_{\max} = c + (\sigma_m + \sigma_{m0}) \tan \phi \quad (6) \quad \text{ここに、} c \text{ は粘着力、} \sigma_{m0} \text{ 初期平均主応力}$$

(7) 式は、偏差応力 s_{ij} をスペクトル分解により、固有値（主偏差応力） $s^{(\alpha)}$ 、固有ベクトル（主偏差方向） $n_i^{(\alpha)}$ として表し、(5) 式を用いて主偏差ひずみの関数として表したものである。

$$s_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 s^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{e^{(\alpha)}}{a + be^{(\alpha)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \quad (7)$$

(8) 式は、以上の式を用いた提案する 3 次元構成則を示したものである。応力 σ_{ij} を、偏差応力 s_{ij} と平均主応力 σ_m に分離し（すなわちここではダイレイタンスを考慮しない）、(4)、(7) 式を用いて記述している。

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{e^{(\alpha)}}{a + be^{(\alpha)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} + K \varepsilon_V \delta_{ij} \quad (8)$$

(9) 式は (8) 式の接線剛性 a_{ijkl} を示したものである。

$$a_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{\alpha=1}^3 \left[\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{kl}} e^{(\alpha)} A^{-1} + G \frac{\partial e^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon_{kl}} A^{-1} - G e^{(\alpha)} A^{-2} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{kl}} \right] n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} + \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_V + K \delta_{kl} \right) \delta_{ij} \quad (9)$$

ここに、(5) 式 $s^{(\alpha)} = \frac{Ge^{(\alpha)}}{1 + \frac{R_f}{\tau_{\max}} Ge^{(\alpha)}}$ の分母を $A = 1 + \frac{R_f}{\tau_{\max}} Ge^{(\alpha)}$ とおいている。

(9) 式で、

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{3(1-2\nu)m}{2(1+\nu)} \bar{K} \varepsilon_V^{m-1} \varepsilon_{vf}^{-m} \delta_{kl} \quad (10) \quad \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{kl}} = m \bar{K} \varepsilon_V^{m-1} \varepsilon_{vf}^{-m} \delta_{kl} \quad (11)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{kl}} = -\frac{R_f}{\tau_{\max}^2} \frac{\partial \tau_{\max}}{\partial \varepsilon_{kl}} G e^{(\alpha)} + \frac{R_f}{\tau_{\max}} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{kl}} e^{(\alpha)} + \frac{R_f}{\tau_{\max}} G \frac{\partial e^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tau_{\max}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_V + K \delta_{kl} \right) \tan \phi \quad (13)$$

$$\frac{\partial e^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial e^{(\alpha)}}{\partial e_{pq}} \frac{\partial e_{pq}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{\alpha=1}^3 n_k^{(\alpha)} n_l^{(\alpha)} - \delta_{kl} \quad (14)$$

である。以上の定式化により、地盤剛性の拘束圧依存性とひずみ依存性を考慮した 3 次元の非線形静的解析が可能となる。各荷重ステップの収束計算には Newton-Raphson 法を用いて計算する。

4. 結論

簡易な双曲線型の 3 次元非線形構成則を提案した。

参考文献 1) Duncan, J. M. and Chang, C. Y., Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Proc. ASCE, Jour. of SM, Vol. 96. No. SM5. pp. 1629-1653. 1970. 2) 堀田洋之：拘束圧とひずみへの依存性を同時に考慮した施工時の実測に基づく地盤の応力-ひずみ関係の評価、日本建築学会構造系論文集、pp. 61-68, 2006. 10 3) 玉置克之、桂豊、岸田了：掘削および構築時の支持地盤のヤング係数の変化、日本建築学会構造系論文集、pp. 73-80, 1993. 4 4) 吉田望、辻野修一：多次元解析に用いる簡易な構成則、第 28 回土質工学研究発表会講演集、pp. 1221-1224, 1993.