安定化有限要素法による非線形分散波理論に基づいた津波遡上解析

中央大学大学院　学生員　○ 利根川　大介
中央大学大学院　学生員　川合　伸宜
中央大学　正会員　田中　聖三
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

日本は，周りが海に囲まれ，4 つのプレートが複雑に重なり合っており，地震による津波などの災害に見舞われることが多い国である．このような災害現象を, 数値解析により，遡上域を正確に把握し，防災対策を行うことは工学上重要である．また津波災害現象の解析において，複雑な自然地形を対象とすることが多いため，任意形状への適合性に優れた有限要素法は有効な手法であると考えられる．

そこで本論文は，支配方程式に波の非線形性と分散性を考慮した非線形分散波方程式 (Boussinesq 方程式) を用い，砕波，遡上現象を表現可能な数値解析手法の検討を行うものである．離散化手法に SUPG 法に基づく安定化有限要素法[1] を適用し，遡上域における移動境界手法として，Euler 的手法を適用する．また砕波減衰モデル[2] として，拡散項と渦動粘性係数により，砕波による運動量散逸を表現し，砕波判定には流速波速比を用いる．数値解析例として Synolakis(1987) の水理実験モデル[3),4] を取り上げ，本手法の有効性を検討する．

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には，非線形分散波方程式 (Boussinesq 方程式) を用い，以下のように表される．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\mathbf{N}_{ij}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j}\right)=\mathbf{K}+\mathbf{R}-\mathbf{G}\mathbf{U} \tag{1}$$

ここで，各ベクトルとマトリックスは以下のようになる．

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} H \\ U_1H \\ U_2H \end{bmatrix}, \mathbf{K}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h^2}{3}\frac{\partial^3 U_iH}{\partial x_1\partial x_i\partial t} \\ \frac{h^2}{3}\frac{\partial^3 U_iH}{\partial x_2\partial x_i\partial t} \end{bmatrix}, \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 0 \\ -c^2\frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -c^2\frac{\partial z}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2-U_1^2 & 2U_1 & 0 \\ -U_1U_2 & U_2 & U_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -U_1U_2 & U_2 & U_1 \\ c^2-U_2^2 & 0 & 2U_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{11}=\nu_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2U_1 & 2 & 0 \\ -U_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{12}=\nu_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -U_1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{21}=\nu_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -U_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{22}=\nu_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -U_1 & 1 & 0 \\ -2U_2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_*}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U_*}{H} \end{bmatrix}, \quad U_*=\frac{gn^2\sqrt{U_1^2+U_2^2}}{H^{1/3}}$$

ここで，U_i は x，y 方向の断面平均流速，$H(=h+\zeta)$ は全水深，h は静水深，ζ は水位変動量，$c(=\sqrt{gH})$ は波速，g は重力加速度，z は標高値，ν_e は渦動粘性係数，n はマニングの粗度係数である．また，$\mathbf{U}$，$\mathbf{K}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{A}_i$，$\mathbf{N}_{ij}$，$\mathbf{G}$ はそれぞれ未知，分散，勾配ベクトル，移流，拡散，摩擦マトリックスである．

(2) 安定化有限要素法

支配方程式 **(1)** に対して，空間方向の離散化として三角形一次要素を用い，SUPG 法に基づく安定化有限要素法[1] を適用する．時間方向の離散化として，2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用いた．また，連立一次方程式の解法には，Element-By-Element Bi-CGSTAB 法を用いた．

(3) 安定化パラメータ

移流項の卓越に対する数値不安定性には SUPG 法を適用することにより回避することができる．しかし水位の不連続面での数値不安定性を回避するためには衝撃捕捉項の導入が必要となる．以下に示すのは非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対して，提案されていた衝撃捕捉項における安定化パラメータ[5] である．

$$\delta=\frac{h_e}{2}\|\mathbf{u}\| \tag{2}$$

しかし，この安定化パラメータ **(2)** は流速のみに依存し，必ずしも適切とはいえない．そこで流速に加えて波速，水位の 2 階微分値を考慮したパラメータ[6] を用いる．

$$\delta=\tau_{shoc}\left(||\mathbf{u}_{int}||\right)^2\left(\frac{h_{dif}}{h^e}\right) \tag{3}$$

$$\tau_{shoc}=\left(\sum_{a=1}^{n_{en}}(c|\mathbf{j}\cdot\nabla N_a|+|\mathbf{u}\cdot\nabla N_a|)\right)^{-1}\left(\frac{|\nabla^2 H_z|}{|\nabla^2 H_z|_{max}}\right)$$

$$H_z=h+z,\ ||\mathbf{u}_{int}||=\sqrt{||\mathbf{u}||^2+c^2},\ \mathbf{j}=\frac{\nabla h}{\|\nabla h\|}$$

ここに，h_{dif} は解析領域における最大水深と最小水深の水位差，h^e は各要素の平均水深，h_e は要素サイズである．また，水位の 2 階微分値を考慮することにより，不連続面に局所的に安定化を施すことが可能となる．衝撃捕捉項は砕波後に適用する．

(4) 移動境界手法

遡上域における移動境界手法として，固定メッシュに基づく Euler 的手法を用いる．Euler 的手法とは，あらかじめ対象領域を有限要素分割しておき，各時間ステップにおいて，要素が陸域の要素なら計算領域外，水域の要素なら計算領域内という処理を行うことにより，境界の移動を Euler 的に表現していくものである．

KeyWords：　安定化有限要素法，非線形分散波理論，砕波・遡上
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail:tone@civil.chuo-u.ac.jp

(5) 砕波減衰モデル

砕波の表現には，岩瀬らにならい，拡散項の渦動粘性係数により運動量散逸を表現し，砕波判定には水表面流速 U_s と波速 c の流速波速比 U_s/c を用いる[2]．水表面の流速は以下の式で表される．

$$U_s = U - \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

ここで U は断面平均流速である．流速波速比 U_s/c が 0.59 を超えたときに，拡散項の渦動粘性係数，

$$\nu_e = \beta\sqrt{gH}\zeta$$

を空間分布として与え，砕波減衰を表現する．β は係数であり，岩瀬らにならい，β=0.23 とする．

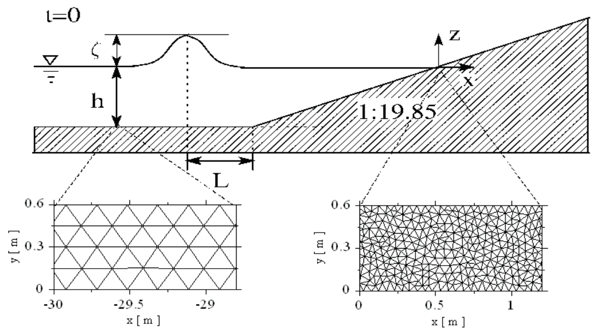
3. 数値解析例

(1) 津波遡上問題

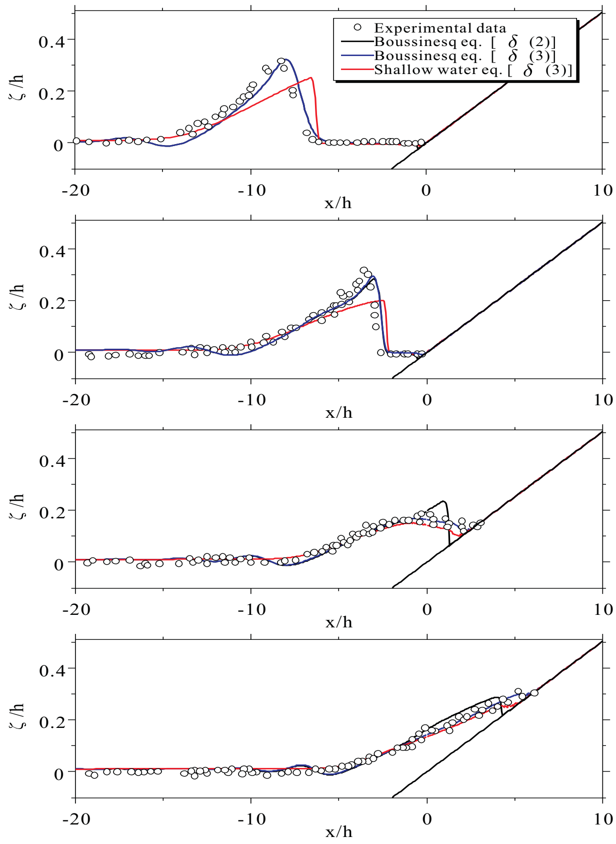
津波の砕波, 遡上問題に対して, Synolakis による水理実験結果[3),4)] と本手法による解析結果との比較を行い, 津波の砕波, 遡上の再現性について検討を行う．解析モデルを**図-1** に示す．L は孤立波の半波長 $(=(\frac{4h}{3\zeta})^{\frac{1}{2}}Arccosh((\frac{1}{0.05})^{\frac{1}{2}}))$[m] であり，初期状態は，$\zeta$=0.3[m]，$h$=1.0[m] の波高水深比は 0.3 である．斜面勾配は，1:19.85 であり，水理実験を考慮し，$n=0.01$[s/m$^{\frac{1}{3}}$] とした．有限要素分割は非構造格子を用い，節点数 4436，要素数 7927 であり，微小時間増分量 Δt=0.01[s] とした．

(2) 解析結果

図-2 において，波高水深比 0.3 での無次元化した各時刻 $(t" = t(\frac{g}{h})^{\frac{1}{2}}$ = 15, 20, 25, 30) における波形の実験結果と解析結果との比較を示す．波の伝播段階 ($t" = 15, 20$) において，Boussinesq 方程式では，分散性を考慮しているため，波の前傾化が抑えられ，波の勾配や波高が実験結果と良い一致を示していることがわかる．しかし非線形長波方程式では，非線形性のみが作用するため，波の前傾化が生じていることがわかる．砕波が生じた後の段階 ($t" = 25, 30$) において，流速のみに依存した安定化パラメータ式 **(2)** は，遡上高を過小評価していることがわかる．しかし波速，水位の 2 階微分値を考慮した安定化パラメータ式 **(3)** は局所的に適度な数値粘性を付加することが可能となり，実験値と良い一致を示していることがわかる．



図－1 解析モデルと有限要素分割図



図－2 各時刻における波形の実験結果と解析結果との比較

4. おわりに

本論文では，支配方程式に砕波減衰モデルを導入した Boussinesq 方程式を用い，砕波，遡上現象を表現可能な数値解析手法の検討を行った．数値解析例として，Synolakis による水理実験モデルを取り上げ，実験結果と解析結果とを比較することにより，本手法の有効性の検討を行った．

本手法は砕波減衰モデル，波速と水位の 2 階微分値を考慮した安定化パラメータを用いることにより，砕波，遡上現象を表現可能であることが確認された．

今後の課題として，遡上域に関する移動境界手法の検討などがあげられる．

参考文献

1) T.E.Tezduyar：Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in apploed Mech.* , 28,pp1-44, 1991
2) 岩瀬浩之，深澤雅人，後藤智明：ソリトン分裂の砕波変形に関する水理実験と数値計算，海岸工学論文集，第 48 巻，pp. 306-310，2001
3) Synolakis，C. E：The runup of solitary wave，*J. Fluid Mech.* ，185，pp.523-545，1987
4) Titov，V. V.，and Synolakis，C. E：Modeling of breaking and nonbreaking long-wave evolution and runup using VTCS-2，*J. Wtrwy. Port, Coast., and. Oc. Engrg., ASCE*，121(6)，308-316，1995
5) T.E.Tezduyar，M.Senga：Determination of the shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows, Computational Mechanics，WCCM VI in conjuction with APCOM ' 04，Beijing，2004.
6) 川合伸宜，田中聖三，樫山和男：浅水長波流れ解析のための安定化有限要素法における安定化項の検討，土木学会第 61 回年次学術講演会 (CD-ROM)，2006