

## CIVA/VOF-FEMによる透過・不透過性構造物周辺の自由表面流れ解析

中央大学大学院 学生員 四谷 宣之  
 中央大学 正会員 田中 聖三  
 中央大学 正会員 檜山 和男

## 1. はじめに

河川・海岸構造物を計画・設計する際、構造物周辺の流況を正確に把握する必要がある。また、近年河川・海岸の構造物には、従来広く用いられてきた不透過性の構造物に代って、環境を配慮した自然調和型の透過性構造物が注目されている。このような検討は、これまで実験により数多く行われてきたが、近年コンピュータの発達により低コストかつ迅速に現象を評価可能となり、数値解析による検討も数多く行われている。透過・不透過性構造物の解析は、前野ら<sup>1)</sup>が構造格子を用いて差分法で行っている。しかし、複雑な構造物を解析する際、非構造格子を用いた有限要素法を用いることは有効な方法である。そこで、本研究では、透過・不透過性構造物を統一的に扱うことが可能な有限要素法に基づく自由表面流れ解析手法の構築を行うものである。

本手法として、流れ場の離散化手法には SUPG/PSPG 法<sup>2)</sup>に基づく安定化有限要素法を適用する。なお、界面の表現には、複雑な自由表面形状を有する構造物周りの流体の挙動を正確に表現するため、ロバスト性の高い界面捕捉法の一つである VOF 法<sup>3)</sup>に着目した。また、界面を精度良く解析するため、自由表面位置を決定する界面関数に関する移流方程式の解法に、移流方程式の高精度解法である CIVA 法<sup>4)</sup>を用いる。

数値解析例として、不透過性構造物越流問題を取り上げ、本手法の精度を検討し、その後透過性構造物越流問題に本手法を適用する。

## 2. 解析手法

## (1) 基礎方程式

本手法における基礎方程式は、榊山ら<sup>5)</sup>により提案されたポーラスモデルに基づき、以下に示す非圧縮粘性流体の Navier-Stokes 運動方程式 (1)、連続式 (2) を用いる。

$$\rho \left( \lambda_v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda \mathbf{u} - \gamma \mathbf{f} - \mathbf{R} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \gamma \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで各記号について、 $\Omega$  は解析領域、 $\mathbf{u}$  は流速、 $\rho$  は密度、 $\mathbf{f}$  は物体力、 $\mathbf{R}$  は水平、鉛直方向の多孔質体からの抵抗力、 $\gamma_v$  は空隙率、 $\gamma$  は水平、鉛直方向面積透過率、各  $\lambda$  は  $C_M$  を慣性力係数とし、以下の式 (3)、(4) で表される。

$$\lambda_v = \gamma_v + (1 - \gamma_v) C_M \quad (3)$$

$$\lambda = \gamma + (1 - \gamma) C_M \quad (4)$$

また、式 (1) における  $\boldsymbol{\sigma}$  は応力テンソルであり以下の式 (5) で表され、応力テンソル内における  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は変形速度テンソル

であり、以下の式 (6) で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -\gamma_v p \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \gamma_x \mathbf{u} + (\nabla \gamma_z \mathbf{u})^T) \quad (6)$$

ここで、 $p$  は圧力、 $\mu$  は粘性係数である。なお、空隙率  $\gamma_v$ 、面積透過率  $\gamma$  を 1.0 とすると、式 (1)、(2) は、非圧縮粘性流体の Navier-Stokes 運動方程式、連続式に帰着する。

## (2) 安定化有限要素法による定式化

基礎方程式 (1)、(2) に対する空間方向の離散化には、SUPG/PSPG 法<sup>2)</sup>に基づく安定化有限要素法を適用し、要素としては、任意形状への適合性に優れた P1/P1(流速・圧力 1次) 要素を用いて補間を行う。

時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用し、連続式は陰的に取り扱う。また、連立一次方程式の解法には Element by Element 法に基づく Bi-CGSTAB 法を用いる。

## (3) 自由表面位置の計算 (CIVA/VOF 法)

自由表面位置を決定する界面関数 (VOF 関数)<sup>3)</sup> は、以下の式 (7) に示す移流方程式により求められる。

$$\gamma_v \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \gamma \phi = 0 \quad (7)$$

ここで、 $\phi$  は VOF 関数を表し、液相領域では  $\phi=1$ 、気相領域では  $\phi=0$ 、自由表面上では  $\phi=0.5$  となる。また、各節点における気体、液体の密度及び粘性係数は、計算された VOF 関数を用いて、以下の式 (8)、(9) より決定される。

$$\rho = \rho_{Liq} \phi + \rho_{Gas} (1 - \phi) \quad (8)$$

$$\mu = \mu_{Liq} \phi + \mu_{Gas} (1 - \phi) \quad (9)$$

ここで、 $\rho_{Liq}$ 、 $\rho_{Gas}$ 、 $\mu_{Liq}$ 、 $\mu_{Gas}$  はそれぞれ液体、気体の密度及び粘性係数である。

移流方程式 (7) の解法には、CIVA 法<sup>4)</sup>を用いる。CIVA 法とは、移流方程式の高精度解法である CIP 法を三角形要素に対して適用可能となるように拡張した方法である。計算方法としては、移流方程式の厳密解である  $\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t)$  を用いて、 $\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t)$  の解を求めるために、 $t - \Delta t$  の値である  $\phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t)$  を用いる。なお、上流点  $\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t$  に位置する  $\phi^n$  の値は、上流側の要素内で補間することにより求められる。また、上流側の要素に対する高次多項式として、三角形要素の場合には、式 (10) に示す面積座標を用いて表す。

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} (L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3) \quad (10)$$

**KeyWords:** 自由表面流れ解析, 安定化有限要素法, CIVA/VOF 法, 透過・不透過性構造物

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: nori1027@civil.chuo-u.ac.jp

ここで,  $(L_i)_{i=1,2,3}$  は, 要素内の面積座標,  $d$  は調節パラメータ,  $\alpha_i, \beta_{jk}$  は係数であり, 上流側の三角形要素をスカラー量  $\phi$  とその空間微係数を用いることにより決定される.

### 3. 数値解析例

#### (1) 不透過性構造物越流問題

本手法の有効性を検討するため, 不透過性構造物越流問題<sup>1)</sup>を取り上げる. 図-1 に解析モデルを示す.

斜線部分に, 障害物として不透過性構造物を設ける. 初期条件として構造物上流側に水を満たし, 解析領域全体の流速  $u$  を 0 とする. 流入条件としては, 計算開始 20 秒後に設定流量の 29.87[l/sec] となるように直線的に流量を増加させ, その後は一定流量を与える. 流出条件としては, 下流端で自由流出とする. また, 壁面を全て non-slip 条件とする. これは, 複雑な解析領域に対して, 境界条件処理を容易に扱えるためである. 水路勾配には, 1/100 を用いる.

解析に用いる Mesh の詳細を表-1 に示す. 構造格子は前野らと同じ節点数, 要素幅の解析 Mesh であり, 非構造格子は構造格子と概ね同じ節点数であり, 構造物近傍を細分化した解析 Mesh である.

以上の条件より, 不透過性構造物周りの流況解析を行い, 構造物越流後の水面形と流速分布を実験値及び前野らによる差分法の解析結果と比較し, 本手法の妥当性を検討する.

#### (2) 解析結果

図-2, 図-3 に構造物越流後の平均的な水面形, 図-1A, B, C, D 断面における流速分布を示す. 図中の EXP. は実験値, FDM は前野らによる解析結果, structure, unstructure はそれぞれ構造格子, 非構造格子を用いた本手法による解析結果を表す.

図-2 より本手法による水面形は, 構造格子, 非構造格子共に前野らによる解析結果及び実験値と良い一致を示した. また, 図-3 より, 構造格子を用いた流速分布は, 流れの傾向は捉えられているものの, non-slip 条件の影響により境界近傍における流速が過大評価されている. 一方, 非構造格子を用いた流速分布は, 境界近傍を細分化しているため non-slip 条件による影響を低減でき, 概ね実験値と良い一致を示した. これより, 非構造格子に基づく本手法は粗密付けが容易であり, 複雑な解析領域を有する問題に対して有効であると考えられる.

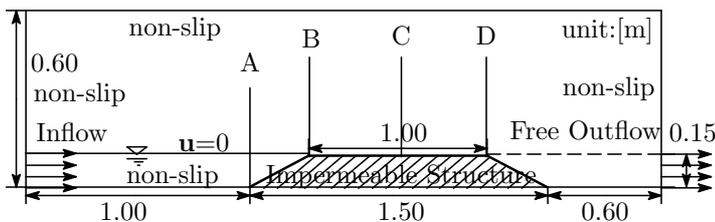


図-1 解析モデル

Mesh	総節点数	総要素数	最小 Mesh 幅 [m]
構造格子	4,625	8,920	x=0.025, y=0.0125
非構造格子	4,711	8,967	0.008

表-1 Mesh データ

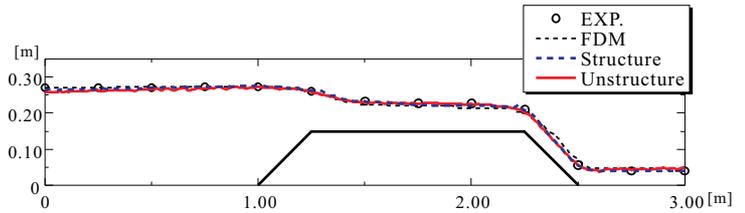


図-2 構造物越流後の水面形の比較

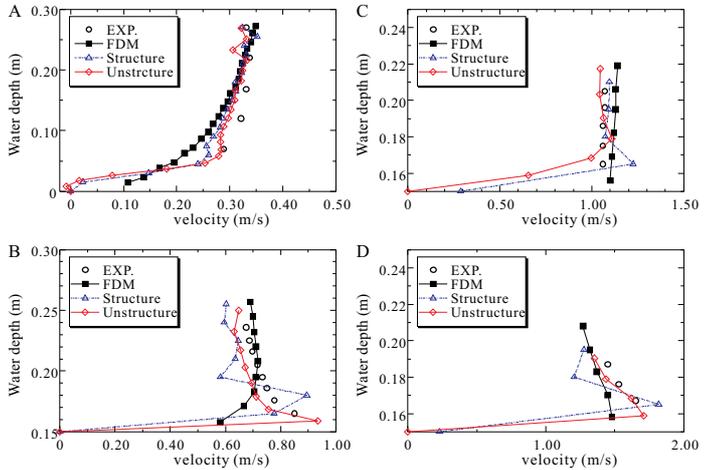


図-3 A, B, C, D 断面における流速分布の比較

### 4. おわりに

本研究では, 透過・不透過性構造物を統一的に扱うことが可能な有限要素法に基づく自由表面流れ解析手法の構築を行った. 数値解析例として不透過性構造物越流問題を取り上げ, 以下の結論を得た.

- 本手法による計算結果は, 水面形, 流速分布共に概ね実験値と良い一致を示し, 本手法の妥当性が確認された.
- 本手法は, 非構造格子に基づくため粗密付けが容易であり, 複雑な解析領域を有する問題に対して有効である.

今後の課題として, 間隙を考慮した透過性構造物周辺の流況解析が挙げられる. なお, 透過性構造物周辺の流況解析については講演時に示す.

#### 参考文献

- 1) 前野志朗, 道典康治, 森永智, 菊池慶太: 捨石堰周辺の流況解析, 水工学論文集, 第 48 巻, pp.829-834, 2004.
- 2) Tezuyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advanced in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1991.
- 3) 桜庭雅明, 弘崎聡, 櫻山和男: 自由表面流れのための CIVA/VOF 法にもとづく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学論文集, Vol.6, pp.215-222, 2003.
- 4) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集 (B 編), 64 巻 620 号, pp.1071-1078, 1998.
- 5) 榊山勉, 鹿島遼一: ポーラスボディモデルによる透過性防波堤執念の波動解析手法の開発, 電力中央研究所報告, U91048, 1992.