

CIP 法の流れ問題への適用性

日本大学大学院 学生会員 ○家塚 史仁
日本大学大学院 正会員 和田 明

1. はじめに

連続体モデルとしての流れの数値シミュレーションにおいて、重要な課題の一つは、移流方程式を安定かつ高精度に解くことである。そのような手法の一つとして、CIP 法(Cubic Interpolated Propagation Method)¹⁾が存在している。CIP 法の特徴は、各節点において物理量のみならず微分量をも考慮し、それらを移流させることにより、補間精度を向上させていることにある。圧縮性・非圧縮性流体の統一解法として、また固体・液体・気体の統一解法として、これまで流体力学のみならず様々な分野で応用され、成果を挙げている。

また、CIP 法の改良版ともいえる Tangent 変換 CIP 法は界面捕獲に有効とされている。この変換は、Tangent 関数の性質を利用し、値が 0 から 1 までの範囲におさまるような場合に非常に有効となる。しかしこれら CIP 法の適用性に関する考察は、あまり多くはない。

そこで、本論では、Navier - Stokes 方程式の 2 次元版ともよべる移流拡散方程式、および 1 次元の Burgers 方程式を基礎方程式とし、ベンチマーク問題を通して、CIP 法の適用性を検証することを目的とする。

2. 2 次元移流拡散問題

2.1 基礎方程式

本節で扱う方程式は、以下の 2 次元非定常移流拡散方程式である。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u}f) = \kappa \nabla^2 f \quad (1)$$

CIP 法では移流項と非移流項を分離して解く。基礎方程式中の移流項に対する補間には A 型 CIP 法を採用する。非移流項である拡散項には、2 次精度の中央差分を用いた、差分近似で計算する。

また、Tangent 変換 CIP 法においては基礎式に現れる f の

代わりに以下の H を解く。

$$H(f) = \tan(\pi(f - 1/2)) \quad (2)$$

この結果を必要に応じて逆変換し、 f を求める。

2.2 Skew Flow 問題

本計算では、不連続な移流速度場に関して検証を行う。問題設定を図 1 に示す。流入境界(図 1 では左辺と下辺)からメッシュに対して斜め一定 θ 方向に 0 または 1 の値を流す。この際、速度ベクトルのノルムを一定値 1 になるようにする。また流出境界(右辺と上辺)は同次自然境界とする。用いた格子は 20×20 の正方格子、拡散係数 κ を 10^{-6} とし移流卓越流れとする。 θ は 45 度及び 72.5 度の 2 通りについて計算する。クーラン数が 0.3 の場合の計算結果を図 2、3 に示す。なお、この問題の正解は、初期条件で与えた値が θ 方向に流れていくものである。

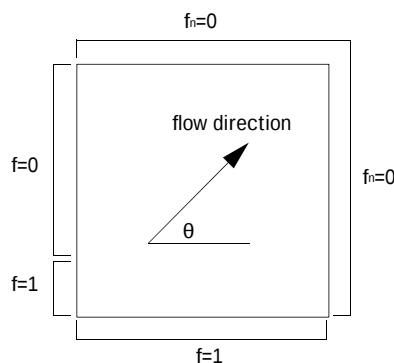


図 1 Skew Flow 問題設定

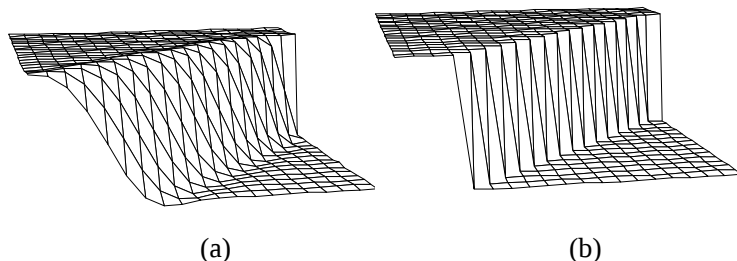


図 2 $\theta = 45$ 度 (a : CIP 法, b : Tangent 変換 CIP 法)

キーワード 移流拡散 移流卓越 CIP 法 Skew Flow Rotating Cone Flow

連絡先 〒102-8251 東京都千代田区五番町 12 番 5 号 日本大学大学院総合科学研究科 090-5535-8824

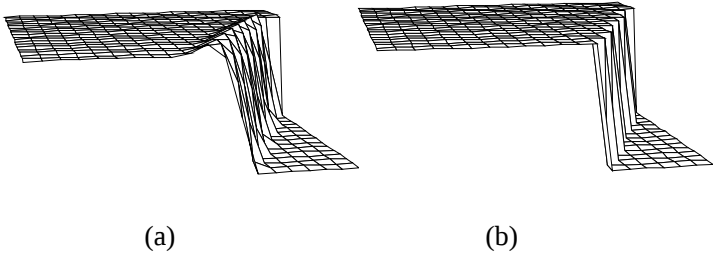


図3 $\theta = 72.5$ 度(a: CIP 法, b: Tangent 変換 CIP 法)

2.3 Rotating Cone 問題

本計算では、連続的な多回転の移流速度場に関して検証を行う。問題設定を図4に示す。初期条件として計算領域内に文字“C”となるように1または0の値を与える。境界条件は境界上で $f = 0$ とする。与える速度ベクトルを $(u, v) = (-5\pi y/10^3, 5\pi x/10^3)$ とし、用いる計算格子は 100×100 の正方格子、拡散係数 κ を 10^{-9} とし、こちらも移流卓越流れとする。本計算では多回転後のプロファイルの結果を考察の対象とするため、Tangent 関数変換 CIP 法による100回転後の結果を、クーラン数が0.3、及び0.03の場合について、それぞれ図5、及び図6に示す。

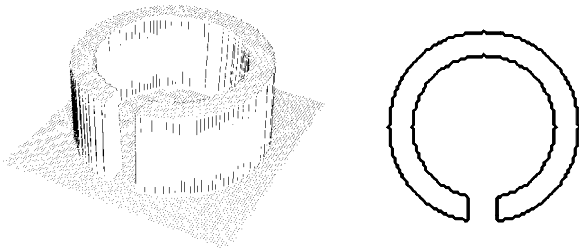


図4 Rotating Cone 問題初期条件(正解)

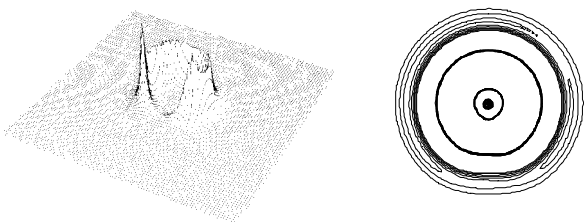


図5 100 回転後(クーラン数 0.3, Tan 変換 CIP 法)

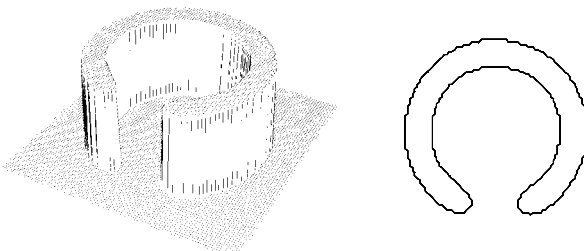


図6 100 回転後(クーラン数 0.03, Tan 変換 CIP 法)

3. Burgers 問題

非線形方程式への適用の検証として、基礎方程式に以下の1次元 Burgers 方程式を用いて計算する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

初期条件を $u = \sin(\pi x)$ ，粘性係数 $\nu = 10^{-2}$ ，境界上で $u = 0$ とし、解析的解の構成できる問題設定とする。移流項に CIP 補間，非移流項には2次精度中心差分を用いる。領域を100分割し、クーラン数を0.001として計算した結果を図7に示す。

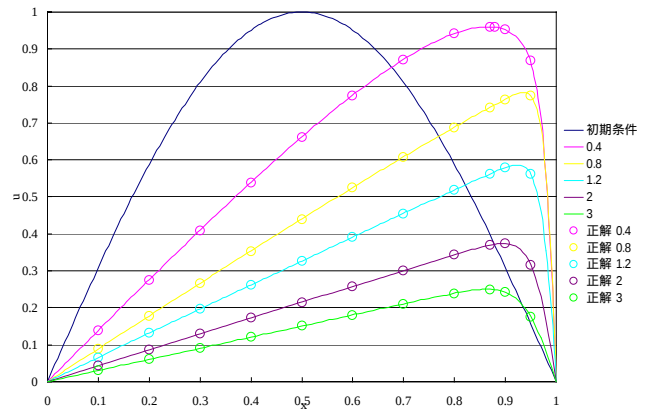


図7 Burgers 方程式の数値計算結果

4. おわりに

本論では、2次元移流拡散方程式及び1次元 Burgers 方程式への CIP 法の適用性を検証した Skew Flow 問題では境界をシャープに捕らえる Tangent 変換の有効性が確認されたが、Rotating Cone 問題での結果から、100回転後では全く違う形状になってしまふことが分かる。CFL を小さくすればプロファイルを何とか再現することはできるが、計算時間が増大してしまう問題が起こる。従って、形を保つための何らかの工夫が必要であると思われる。また Burgers 問題ではクーラン数を小さく取り解析的解と計算結果がようやく合う。

今後は非移流項にも高次の補間式を用いることにより、微分方程式全体の精度の向上を図ったスキーム²⁾を検討していき、一般的な Navier-Stokes 方程式への適用へとつなげていきたい。

参考文献

- 1) T.Yabe et al: The Cubic-Interpolated Pseudo-Particle (CIP) Method for Solving Hyperbolic-Type Equations. J. Comput.Phys., 61 261-268, 1985.
- 2) 秋元, 登坂: 高次補間を用いた非圧縮性粘性流れ解析, 日本計算工学会論文集, Vol.3, 111-117, 2001.