安定化有限要素法による浅水長波流れ解析における高精度化

中央大学大学院　学生員　○川合　伸宜
中央大学　正会員　田中　聖三
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

海岸，河川，湖沼などの水環境流れは，浅水長波方程式により記述することができる．これらの現象は複雑な自然地形を対象とすることが多いため，数値解析を行う際には，任意形状への適合性に優れた有限要素法は有効であるといえる．既往の研究において，安定化有限要素法を支配方程式に適用した場合，計算結果は衝撃捕捉項の安定化パラメータ[1)2)]の影響を受けることが知られている．

そこで，本研究は浅水長波流れ解析の高精度化を目的とし，衝撃捕捉項のパラメータについて検討を行うものである．数値解析例として，矩形水槽内における障害物のあるダムブレイク問題を取り上げ，本研究で提案する安定化パラメータの有効性および汎用性の検討を行った．また、本パラメーターの複雑な自然地形への適用として津波氾濫解析を行うものである．

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には，以下に示す浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{NU} - \mathbf{R} = 0 \qquad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh-u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial z}{\partial x} \\ -gh\frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ gh-v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_*}{h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_*}{h} \end{bmatrix}, \quad u_* = \frac{gn^2\sqrt{u^2+v^2}}{h^{1/3}}$$

ここに，$\mathbf{U}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{A}_i$，$\mathbf{N}$ はそれぞれ未知ベクトル，勾配ベクトル，移流行列，摩擦行列である．また，h, u，v，z，u_* は初期水深，水位変動量，x，y 方向断面平均流速，標高，摩擦速度である．なお，g，n，はそれぞれ重力加速度，Manning の粗度係数である．

(2) 安定化有限要素法

支配方程式 (1) に空間方向の離散化として SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると，以下の重み付き残差方程式が得られる．

$$\int_\Omega \mathbf{U}^* \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{NU} - \mathbf{R}\Big) d\Omega$$
$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} \Big(\mathbf{A}_j^T \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_j}\Big) \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{NU} - \mathbf{R}\Big) d\Omega$$
$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{SHOC} \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i}\Big) \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}\Big) d\Omega = 0 \qquad (2)$$

式 (2) の左辺第 1 項は Galerkin 項であり，第 2，3 項の要素ごとの積分の総和項はそれぞれ SUPG 項，衝撃捕捉項である．なお，$\mathbf{U}^*$ は重み関数であり，τ_{SUPG} および ν_{SHOC} は安定化パラメータ[1)2)]である．

(3) 安定化パラメータ

衝撃捕捉項は不連続面における数値振動を制御するものであり，式 (2) の ν_{SHOC} は式 (3) のように定義する．Case1 は従来より提案されている流速に依存するものであり，Case2 および Case3 が本研究で提案するものである．

$$\nu_{SHOC} = \tau_{SHOC}\,(||\mathbf{u}_{int}||)^2 \qquad (3)$$

Case1

$$\tau_{SHOC} = \Big(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} \Big|\mathbf{u}\cdot\nabla N_\alpha\Big|\Big)^{-1} \qquad (4)$$

$$||\mathbf{u}_{int}|| = ||\mathbf{u}|| \qquad (5)$$

Case2

Case2 は Case1 に浅水長波流れの代表的速度である波速，水位の二階微分値を考慮に加えたものである．

$$\tau_{SHOC} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} (c|\mathbf{j}\cdot\nabla N_a| + |\mathbf{u}\cdot\nabla N_a|)\right)^{-1} \left(\frac{|\nabla^2 H|}{|\nabla^2 H|_{max}}\right) \qquad (6)$$

$$H = h + z, \quad \mathbf{j} = \frac{\nabla H}{\parallel \nabla H \parallel}, \quad ||\mathbf{u}_{int}|| = \sqrt{||\mathbf{u}||^2 + c^2} \qquad (7)$$

ここに，N_a は形状関数である．

Case3

Case3 は Case2 の式 (6) に以下のように水深に関する無次元の項を考慮に加えたものである．

$$\tau_{SHOC} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} (c|\mathbf{j}\cdot\nabla N_a| + |\mathbf{u}\cdot\nabla N_a|)\right)^{-1} \left(\frac{|\nabla^2 H|}{|\nabla^2 H|_{max}}\right)\left(\frac{h_{max} - h_{min}}{h^e}\right) \qquad (8)$$

$$||\mathbf{u}_{int}|| = \sqrt{||\mathbf{u}||^2 + c^2} \qquad (9)$$

ここに，h^e は各要素の平均水深である．なお，h_{max}，h_{min} はそれぞれ解析領域における水深の最大値，最小値である．

KeyWords：　安定化有限要素法，浅水長波流れ，安定化パラメータ
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: kawai@civil.chuo-u.ac.jp

また，SUPG 法は移流項の卓越による数値不安定性を制御するものであり，式 **(2)** の τ_{SUPG} は以下のように定義する．なお，τ_{SUPG} は各ケース統一とする．

$$\tau_{SUPG} = \left(\frac{1}{(\tau_{SUGN1})^2} + \frac{1}{(\tau_{SUGN2})^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$\tau_{SUGN1} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} (c \mid \mathbf{j} \cdot \nabla N_a \mid + \mid \mathbf{u} \cdot \nabla N_a \mid) \right)^{-1} \tag{11}$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2} \tag{12}$$

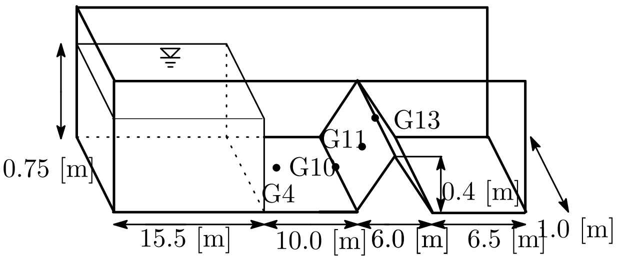
(4)　移動境界手法

本研究では，浅水長波流れの移動境界手法として Euler 的手法[3] を用いる．Euler 的手法とは，あらかじめ解析領域を有限要素分割しておき，毎時間ステップにおいて各要素が陸域か水域かを判定する手法である．

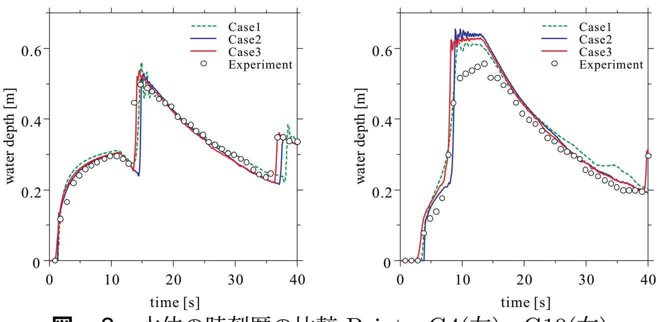
3.　数値解析例

(1)　障害物のあるダムブレイク問題

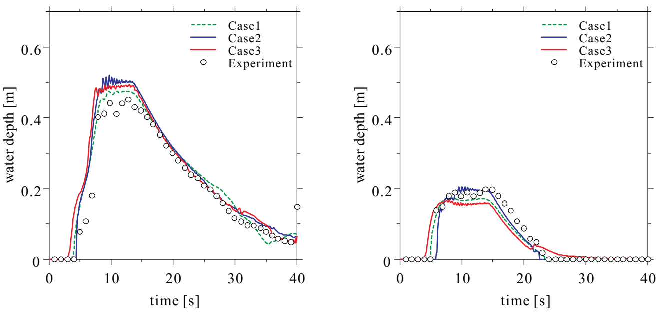
本安定化パラメータの有効性を検証するために**図－ 1** に示す障害物のあるダムブレイク問題を取り上げる．有限要素分割は三角形要素を使用し，総節点数 765，総要素数 1216，x 方向分割幅 0.25[m]，y 方向分割幅 0.25[m] である．マニングの粗度係数は平面部で 0.0125[s/m$^{1/3}$] であり，障害物部では 0.011[s/m$^{1/3}$] である．境界条件として，壁面において slip 条件を与え，右端境界を自由流出とした．また，微小時間増分量は 0.01[s] とし，計算を行った．



図－ 1　解析モデル



図－ 2　水位の時刻歴の比較 Point - G4(左)，G10(右)

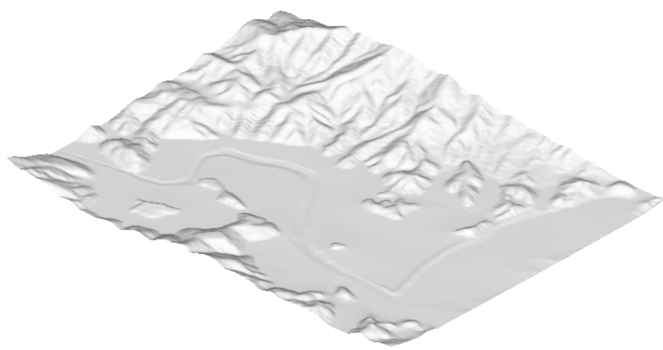


図－ 3　水位の時刻歴の比較 Point - G11(左)，G13(右)

図－ 2〜3 に各地点における水深の時刻歴の計算結果を示す．各地点において，計算結果と実験値の傾向は概ね一致している．障害物の手前の点である G4，G10 において，各パラメータによる計算結果は位相の差が見られる．実験値と比較すると本研究で提案する Case3 が最も良い一致を示していることがわかる．また，G10 および障害物の斜面の点である G11，障害物の頂点である G13 においては，各パラメータともに水深を過大評価しており，ピーク値付近にて振動が見られる．

(2)　複雑な自然地形における津波氾濫解析

本パラメータの複雑な自然地形における解析への適用として，津波氾濫解析を行う．解析モデルを**図－ 4** に示す．有限要素分割は三角形要素を使用し，総節点数 62571，総要素数 124126，陸域および河道域，海域分割幅はおよそ 10.0[m] である．境界条件としては，解析モデル右端の流入部より波を流入させる．微小時間増分量は 0.01[sec] とし，計算を行う．なお，解析結果は講演時に示す．



図－ 4　解析モデル

4.　おわりに

本研究は安定化有限要素法による浅水長波流れ解析の高精度化を目的とし，衝撃捕捉項の安定化パラメータの検討を行った．数値解析を通じて，以下の結論を得た．

- 障害物のあるダムブレイク問題において，本研究で提案した本安定化パラメータ Case3 の計算結果は，実験値と良い一致を示した．

今後の課題として，移動境界手法、開境界処理の検討を行う予定である．

参考文献

1) T.E.Tezduyar, Y.Osawa : Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors ,*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**,pp411-430,2000.
2) T.E.Tezduyar, M.Senga : Determination of the shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows, *Computational Mechanics*,WCCM VI in conjuction with APCOM'04,Beijing,2004.
3) Mutsuto Kawahara, Tsuyoshi Umetsu : Finite element method for moving boundary problems in river flow,*International journal for Numerical Methods in Fluids* **6**,pp365-386,1986.