

スカラー波動, 弾性波動問題における三次元時間領域境界要素法

○福井大学大学院 正会員 斎藤 隆泰
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬 壮一
福井大学大学院 正会員 福井卓雄

1. はじめに

本論文では, 演算子積分法を用いた新しい三次元時間領域スカラー波動, 弾性波動問題における境界要素法について述べる。境界要素法は, 無限領域を容易に扱える唯一の数値解析手法であることから, 今日まで, 波動問題に適した数値解析手法として広く利用されてきた¹⁾。しかし, その時間領域解法では, 時間ステップ幅が小さい時に数値的に不安定になることが知られている。そこで, 本研究では, Lubich が提案した, 繰込み積分を精度良く安定に計算できる手法である演算子積分法 (OQM)²⁾ を三次元時間領域スカラー波動, 弾性波動問題に対する境界要素法に適用することを行い, 数値解析例とともに, 本手法の有効性について検討する。

2. 三次元スカラー波動・弾性波動問題における時間領域境界積分方程式

はじめに, 三次元スカラー波動場における外部散乱問題を考える。外部領域を $\bar{D}$, 散乱体の境界を S とする。入射波 p^{in} が散乱体 D により反射・散乱された時, 時刻 t における圧力場 $p(\mathbf{x}, t)$ に対する時間領域境界積分方程式は, 対応する圧力勾配 $q(\mathbf{x}, t)$ を用いて以下のように表される。

$$\frac{1}{2}p(\mathbf{x}, t) = p^{in}(\mathbf{x}, t) + \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * q(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * p(\mathbf{y}, t) dS_y, \quad \mathbf{x} \in S \quad (1)$$

同様に, 三次元弾性波動問題における外部散乱問題に対する境界積分方程式は, 変位 u_i および対応する表面力 t_i から,

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, t) = u_i^{in}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (2)$$

で表される。ただし, 式 (1), 式 (2) において, G, H 及び U_{ij}, T_{ij} はそれぞれ三次元時間領域スカラー波動, 弾性波動問題における基本解及び対応する二重層核である。また, $*$ は繰込み積を表す。通常, 式 (1), (2) を時・空間に離散化し, 代数方程式に帰着させることで境界上の未知量を決定することが出来る。しかしながら, 式 (1), (2) の繰込み積を精度良く, 安定に計算することは, 容易ではない。その

ため, 本研究では, Lubich が提案した演算子積分法 (OQM) を式 (1), (2) に用いることを考える。

3. 演算子積分法の時間領域境界積分方程式への応用

Lubich は繰込み積分

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

の近似値を離散化繰込み積

$$f * g(n\Delta t) \simeq \sum_j \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t) \quad (4)$$

により計算する場合の重み $\omega_j(\Delta t)$ の決定法として, f の Laplace 変換を導入し, 一部の積分を差分解に置き換える手法を提案した。この方法によれば, 重みの近似値は時間増分 Δt に対して

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} F\left(\frac{\delta(\xi)}{\Delta t}\right) \xi^{-n-1} d\xi \simeq \frac{\rho^{-n}}{L} F\left(\frac{\delta(\xi)}{\Delta t}\right) e^{\frac{-2\pi i n l}{L}} \quad (5)$$

により計算される (詳しい式展開は文献²⁾ を参照)。ここに, F は f の Laplace 変換であり $\delta(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \xi^j$ は利用する差分法 (線形マルチステップ法) の生成多項式の商である。また $\xi_l = \rho e^{2\pi i l/L}$ であり, ρ は目標とする精度により決定されるパラメータであり $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ を満足するように決定される。また, L は定数である。

演算子積分法を時間領域境界要素法に適用するには, 式 (3), (4), (5) を用いて式 (1), (2) の繰込み積分を評価すればよい。つまり, 境界積分方程式 (1), (2) は基本解及び二重層核の Laplace 変換を用いた形で離散化され, 境界条件を考慮して代数方程式を解けば, 境界上の未知量を求めることが出来る。

影響関数の計算で必要となる Laplace 変換域での基本解 G, U_{ij} 及び対応する二重層核 H, T_{ij} を $\wedge$ をつけて示せば, 三次元スカラー波動問題に対して,

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\frac{s}{c}r} \quad (6)$$

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{sr}{c}} \left(-\frac{s}{cr} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial n_y} \quad (7)$$

Key Words: 境界要素法, 演算子積分法, 波動解析

〒910-0017 福井県福井市文京 3-9-1 TEL 0776-27-8977 FAX 0776-27-8746

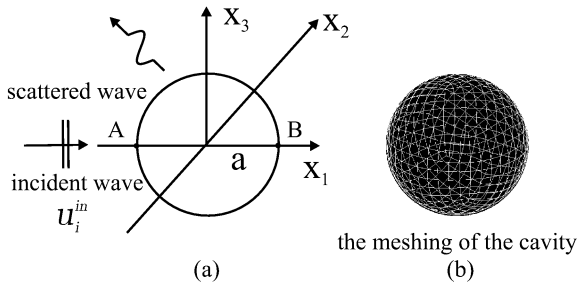


図-1 球形空洞による平面入射波の散乱問題 (a):解析モデル (b): 空洞の要素分割モデル (384 要素)

一方、三次元弾性波動問題に対しては、

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) &= \frac{1}{4\pi\rho_e} \left[\frac{3r_{,i}r_{,j} - \delta_{ij}}{r^3} \left\{ \frac{sr + c_L}{c_L s^2} e^{-\frac{sr}{c_L}} - \frac{sr + c_T}{c_T s^2} e^{-\frac{sr}{c_T}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_{,i}r_{,j}}{r} \left\{ \frac{e^{-\frac{sr}{c_L}}}{c_L^2} - \frac{e^{-\frac{sr}{c_T}}}{c_T^2} \right\} + \frac{\delta_{ij}}{rc_T} e^{-\frac{sr}{c_T}} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= n_k(\mathbf{y})\rho_e(c_L^2 - 2c_T^2)U_{il,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\delta_{kj} \\ &\quad + \rho_e c_T^2(U_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + U_{ik,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t))n_k(\mathbf{y}) \quad (9) \end{aligned}$$

と求めることができる。ここで $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, c はスカラー波の波速, c_L, c_T は縦波, 横波の波速 s は Laplace パラメータ, ρ_e は密度, n_k は単位外向き法線ベクトルの成分である。

4. 数値解析例

図 1-(a) のような三次元無限弾性体中の球形空洞による平面入射波の散乱問題を考える (三次元スカラー波動問題による解析結果は紙面の都合上省略する)。空洞の中心は原点にあるとする。また、解析では図 1-(b) のように空洞を 384 要素に分割し、式 (1), (2) を一定要素で離散化した。また、入射波は x_1 軸に沿って伝播する縦波とする。入射波の変位場 $u_i^{in}(\mathbf{x}, t)$ と対応する応力場 $\sigma_{ij}^{in}(\mathbf{x}, t)$ は以下の通りである。

$$u_i^{in}(\mathbf{x}, t) = \delta_{i1} \frac{\sigma_0}{\rho_e c_L^2} (c_L t - x_1 - a) H(c_L t - (x_1 + a)) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{in}(\mathbf{x}, t) &= -\sigma_0 \{ (1 - 2\kappa)\delta_{ij} + 2\kappa\delta_{i1}\delta_{j1} \} \\ &\quad \times H(c_L t - (x_1 + a)) \quad (11) \end{aligned}$$

ここに、 a は空洞の半径, δ_{ij} はクロネッカーデルタ, $\kappa = c_T^2/c_L^2$ であり σ_0 は入射波の応力振幅である。図 2 は空洞の A, B 点における変位 $\rho_e c_T^2 u_1 / \sigma_0 a$ の時刻歴応答を示す。実線及び波線は Pao と Mow により与えられる周波数域の解析解を逆フーリエ変換して得られた解であり、記号は本手法 (OQBEM) による解を表している。入射波面が最初に点 A に到達する時刻を $c_L t/a = 0.0$ としている。A 点に入射波が到達後、A 点の変位は次第に増加し始め、時刻 $c_L t/a = 2$ 付近からその傾きはやや緩やかになる。入射波

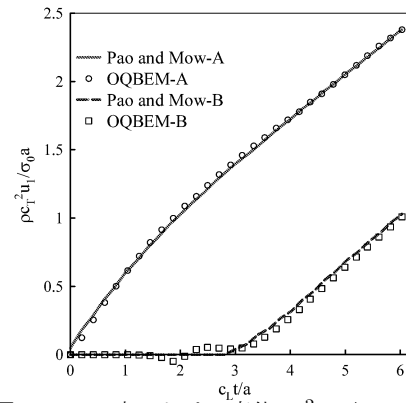


図-2 A, B 点における変位 $\rho_e c_T^2 u_1 / \sigma_0 a$ の時刻歴

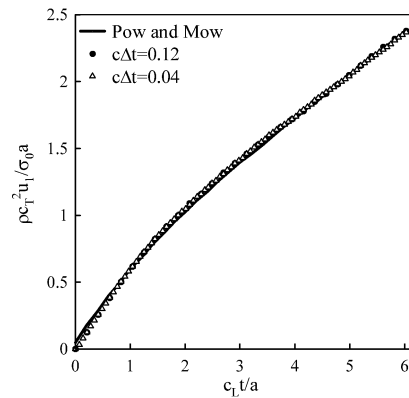


図-3 時間ステップを変化させた時の A 点における変位 $\rho_e c_T^2 u_1 / \sigma_0 a$ の時刻歴

が最初に B 点に到達する時刻 $c_L t/a = 2.0$ 付近で B 点の変位もゆつくりと増加しはじめる。本手法 (OQBEM) による解は、Pao と Mow の解析解から得られた解とほぼ一致していることが確認できる。図 3 は OQBEM において時間ステップを $c_T \Delta t/a = 0.04, 0.12$ とした場合の図 1 の A 点での x_1 方向変位を Pao と Mow の解析結果と比較したものである。時間ステップ幅を小さくしても解析結果とよく一致した結果が得られており、OQBEM を用いることによって時間ステップ幅によらず安定した高精度な解が得られることがわかる。

5. まとめ

本研究では、三次元スカラー波動、弾性波動問題に対する OQBEM を開発した。弾性波動問題に対する数値解析例と共に本手法の有効性を示した。今後は、高速多重極法⁴⁾を適用し計算時間、記憶容量の効率化を図ると共に、超音波非破壊評価、地震波の数値シミュレーションに適用していく予定である。

参考文献

- 1) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- 2) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129-145.
- 3) Pao, Y.-H. and Mow, C. C.: Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane and Russak, New York (1973).
- 4) Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60**, pp. 187-207, 1985.