

領域積分方程式による弾性波動場の逆散乱解析手法

○ 東京理科大学 学生会員 岩崎健太郎
東京理科大学 正会員 東平光生

1 はじめに

波動方程式における数値解析としての領域積分方程式を用いる研究は、活発に行われてきたと言え難い。しかし、領域積分方程式は、媒質の揺らぎと波動方程式の解を直接結びつけることができる数学的な利点を有している。

本論文では、弾性波動場における領域積分方程式による逆散乱解析の定式化を展開する。この手法の特徴は、Krylov 部分空間反復解法¹⁾とFFTを組み合わせる点にある。ここでは、逆散乱解析手法の概要とこれを用いた数値計算例を示す。

2 解析手法の概要

2.1 問題の定義

本論文は、図1に示すように平面波が不均質領域で乱され、散乱波が生成される状況を考える。そして、全波動場が既知のとき、Lamé の定数の変動部分を推定する問題を扱う。弾性波動場は3次元で、媒質の弾性定数は次のように表せると仮定する。

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{x}) &= \lambda_b + \tilde{\lambda}(\vec{x}) \\ \mu(\vec{x}) &= \mu_b + \tilde{\mu}(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)\end{aligned}\quad (1)$$

ここに、 λ, μ は Lamé の定数であり、添え字の b は Lamé の定数が一定の部分を表す。また、 $\tilde{\lambda}$ および $\tilde{\mu}$ は Lamé の定数の変動部分を表す。すなわちここでは、散乱波動場から $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ を推定することを考える。

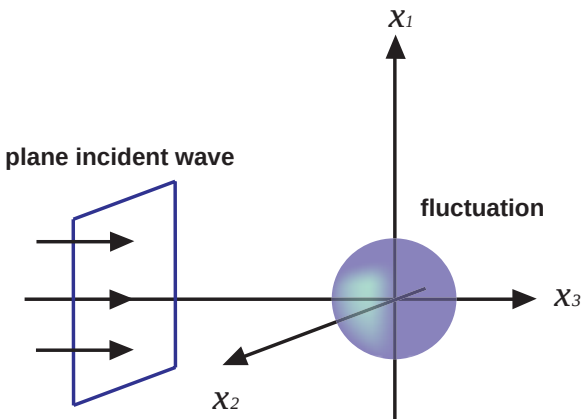


図 1: 本論文で扱う問題

2.2 波領域数における領域積分方程式

波数領域の領域積分方程式は先の論文²⁾より次のように表される。

$$\hat{v}_i(\vec{\xi}) = -\hat{h}_{ij}(\vec{\xi})\hat{q}_j(\vec{\xi} + \vec{\xi}_L) - \hat{h}_{ij}(\vec{\xi})\mathcal{F}N_{jk}(\vec{x})\mathcal{F}^{-1}\hat{v}_k(\vec{\xi}) \quad (2)$$

ここに、 $\hat{v}_i(\vec{\xi})$ は散乱波、 $\hat{h}_{ij}(\vec{\xi})$ は波数領域の Green 関数を構成するもの、 $N_{jk}(\vec{x})$ 、 $\hat{q}_j(\vec{\xi})$ は媒質の揺らぎとその勾配に関連した関数として表現される。 $\mathcal{F}$ は Fourier 変換の演算子、 $\mathcal{F}^{-1}$ は Fourier 逆変換の演算子である。ただし、

$$\begin{aligned}N_{jk}(\vec{x}) &= -(\tilde{\lambda}(\vec{x}) + \tilde{\mu}(\vec{x}))\partial_j\partial_k - \delta_{jk}\tilde{\mu}(\vec{x})\partial_l\partial_l \\ &\quad - \partial_j\tilde{\lambda}(\vec{x})\partial_k - \delta_{jk}\partial_l\tilde{\mu}(\vec{x})\partial_l - \partial_k\tilde{\mu}(\vec{x})\partial_j \quad (3) \\ \hat{h}_{ij}(\vec{\xi}) &= \frac{\delta_{ij}}{\mu_b(|\vec{\xi}|^2 - k_T^2 - i\epsilon)} - \frac{\xi_i\xi_j}{2\mu_b(1-\nu)} \times \\ &\quad \frac{1}{(|\vec{\xi}|^2 - k_T^2 - i\epsilon)(|\vec{\xi}|^2 - k_L^2 - i\epsilon)} \quad (4)\end{aligned}$$

である。均質波動場での平面波 f_k として x_3 軸方向に伝播する P 波を考える。このとき、 f_k のポテンシャルとして、 $\Phi_I(\vec{x}) = A \exp(ik_L x_3)$ を用いることができる。したがって、平面波は $f_k(\vec{x}) = \partial_k \Phi_I(\vec{x})$ と表せる。この時、 $\vec{\xi}_L = (0, 0, k_L)$ である。また、

$$\vec{q}(\vec{x}) = Ak_L^2 \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{\lambda}(\vec{x}) \\ \partial_2 \tilde{\lambda}(\vec{x}) \\ (\partial_3 - ik_L)(\tilde{\lambda}(\vec{x}) + 2\tilde{\mu}(\vec{x})) \end{pmatrix} \quad (5)$$

である。ここでは繰り返し現れる添え字については総和規約を用いている。

2.3 inversion 問題における領域積分方程式の定式化

式 (2) の両辺に $-\hat{h}_{ji}^{-1}(\vec{\xi})$ を乗じると、次式を得る。

$$-\hat{h}_{ji}^{-1}(\vec{\xi})\hat{v}_i(\vec{\xi}) = \hat{q}_j(\vec{\xi} + \vec{\xi}_L) + \mathcal{F}N_{jk}(\vec{x})\mathcal{F}^{-1}\hat{v}_k(\vec{\xi}) \quad (6)$$

ここで、右辺第一項は、シフト演算子 S を用いて、

$$\hat{q}_j(\vec{\xi} + \vec{\xi}_L) = S\hat{q}_j(\vec{\xi}) \quad (7)$$

と表される。ここに、

$$S = \mathcal{F} \exp(-i\vec{x} \cdot \vec{\xi}_L) \mathcal{F}^{-1} \quad (8)$$

である。また、右辺第二項は、次のように表される。

$$\mathcal{F}N_{jk}(\vec{x})\mathcal{F}^{-1}\hat{v}_k(\vec{\xi}) = \mathcal{F}\mathcal{B}_{jk}(\vec{x})\mathcal{F}^{-1}\hat{q}_k(\vec{\xi}) \quad (9)$$

キーワード：領域積分方程式, Fourier 積分変換, Krylov 部分空間反復解法, FFT

〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4075)

ここで、 $\mathcal{B}_{jk}(\vec{x})$ は、微分演算子と散乱波によって構成される。

式(6)に式(7)と式(9)を代入し、逆シフト演算子 $S^{-1} = \mathcal{F} \exp(i\vec{x} \cdot \vec{\xi}_L) \mathcal{F}^{-1}$ を両辺に乘じることにより正則化を図れば、次式を得る。

$$-S^{-1} \hat{h}_{ji}^{-1}(\vec{\xi}) \hat{v}_i(\vec{\xi}) = (\delta_{jk} + S^{-1} \mathcal{F} \mathcal{B}_{jk}(\vec{x}) \mathcal{F}^{-1}) \hat{q}_k(\vec{\xi}) \quad (10)$$

式(10)のFourier変換にFFTを用い、さらに反復解法を適用することで、 $\hat{q}$ を求めることができる。そして、 $\hat{q}$ より媒質の揺らぎを決定することができる。

3 数値計算結果

前述のように、ここでは x_3 軸に沿って平面波が伝播し、不均質領域で波動が乱される問題を扱う。平面波はP波とする。

弾性定数のバックグラウンドは、 $\lambda_b = 4\text{GPa}$, $\mu_b = 2\text{GPa}$, $\rho = 2\text{g/cm}^3$ とする。すなわち、このときのP波の速度は 2km/s , S波の速度は 1km/s である。また、波動場の振動数を 1Hz とする。ターゲットとなるラメ定数は次のように設定している。

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\vec{x}) &= 0.1 \exp(-0.2|\vec{x}|^2) \\ \tilde{\mu}(\vec{x}) &= 0.1 \exp(-0.2|\vec{x}|^2) \end{aligned} \quad (11)$$

収束条件は、解くべき連立方程式を $Ax = b$ としたとき、近似解 y が $\|Ay - b\| \leq 0.005\|b\|$ を満たしたときとした。

以下、図2、図3に、 $x_3 = 0$ の時のラメ定数の変動部分 $\tilde{\lambda}(\vec{x}), \tilde{\mu}(\vec{x})$ を推定した結果を示す。proposedが本手法で求めた解であり、targetが求めるべき解である。両者は良好に一致している解が得られている。

また、図4に、縦軸に相対残差 $\epsilon = \frac{\|Ay - b\|}{\|b\|}$ 、横軸に反復回数をとった収束グラフを示す。

数値計算に要した時間は、AMD opteronのプロセッサを搭載したPC(4CPU並列)で30minであった。ただし、反復回数は18回で打ち切っている。また、FFTにはACMLライブラリを使用し、FFTは 256^3 で行った。

4 むすび

本論文では、領域積分方程式を用いた全無限弾性波動場における逆散乱解析を行った。Krylov部分空間反復解法とFFTを組み合わせる手法を提示し、精度良い逆散乱解析が可能となった。

結果に示したものは一例であるが、数値を変えた際においてもおおむね良好に求めることが可能である。以上のことから、波動場から媒質の揺らぎが決定できるということがわかった。

今後は多重散乱波動場、半無限弾性波動場への展開が課題となる。

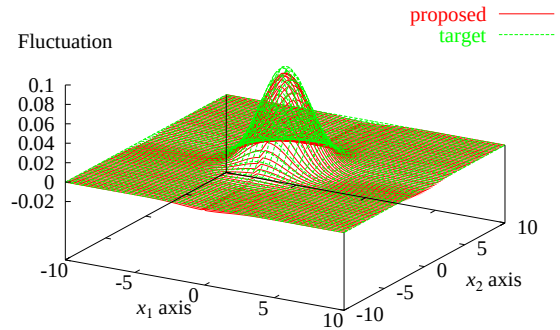


図2: 本手法による解と求めるべき解の比較 $[\tilde{\lambda}(\vec{x})]$

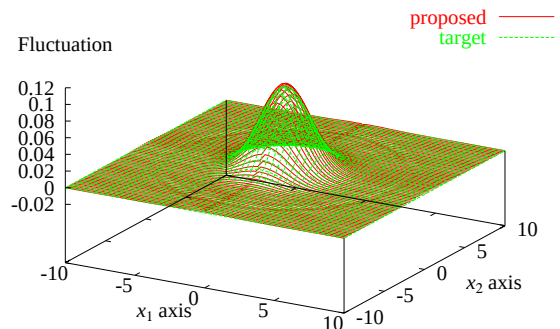


図3: 本手法による解と求めるべき解の比較 $[\tilde{\mu}(\vec{x})]$

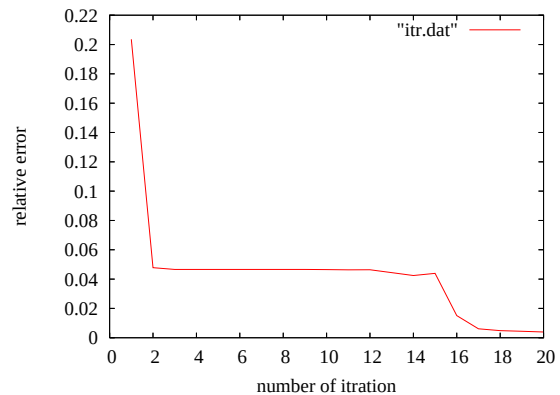


図4: 反復回数と相対残差の関係

5 参考文献

- 1) 藤野清次, 張紹良: 反復解法の数理, 応用数値計算ライブラリー, 朝倉書店, 1996.
- 2) Touhei, T.: Fourier 積分変換を用いた領域積分方程式による揺らぎを持つ弾性波動場の解析, 土木学会論文集, Vol.62, No.4, pp.936-949