

領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ弾性波動場の散乱解析手法について

○ 東京理科大学 学生会員 木内拓
東京理科大学 正会員 東平光生

1 はじめに

領域積分方程式は、媒質の不均質領域(揺らぎ)と弾性波動場を直接結びつける利点がある。現状では、著者の一人によって、領域積分方程式の Fourier 変換と、そのユニタリ性に着目した離散化手法が展開され、スパース行列を得ることに成功している¹⁾。本論文では、これに加え、Fourier 変換を高速 Fourier 変換(FFT)に置き換え、直接的に反復解法を適用する手法について論じる。数値計算では、従来の Fourier 積分変換と Haar 基底による離散化手法の結果のみならず、新たに展開された FFT と反復解法の結果を比較することで両者の手法の特徴について言及する。

2 解析手法の概要

2.1 Fourier 積分変換された領域積分方程式

弾性波動場における支配方程式の解を積分方程式で表現すると次のようになる。

$$u_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}) - \int_{\mathbb{R}^3} g_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) N_{jk}(\vec{y}) u_k(\vec{y}) d\vec{y} \quad (1)$$

ここに、 f_i は均質場を伝播する平面波、 g_{ij} は Green 関数、 N_{jk} は揺らぎに関わる微分演算子を表わす。式(1)を散乱波に関する方程式に書き換え、Fourier 積分変換を施すと次式となる。

$$\hat{v}_i(\xi) = -\hat{h}_{ij}(\xi) \hat{q}_j(\xi - \vec{\xi}_L) - \hat{h}_{ij}(\xi) \hat{\omega}_j(\xi) \quad (2)$$

ただし、 $\hat{\omega}_j$ は次に示す関数の Fourier 変換である。

$$\omega_j(\xi) = N_{jk}(\vec{x}) v_k(\vec{x}) \quad (3)$$

ここに、 $\hat{q}_j$ は媒質の揺らぎとその勾配に関係した関数であり、 $\hat{h}_{ij}$ は Green 関数の Fourier 変換に関係する関数である。

2.2 Haar 基底を用いた積分方程式の離散化手法

Haar 基底による離散化手法では、式(2)、(3)の方程式を波数領域の Haar 基底及びその Fourier 逆変換で離散化し、両者を連立させるものである。結果としてスパースな行列が得られることになる。

2.3 FFT と反復解法を組み合わせた積分方程式の解法

前述の手法に対して、方程式を一つにまとめ、FFT と反復解法を適用し積分方程式を解く手法を提示できる。式(2)と式(3)を一つの式にまとめると次式を得る。

$$\hat{v}_i(\vec{\xi}) = -\hat{h}_{ij}(\xi) \hat{q}_j(\vec{\xi} - \vec{\xi}_L) - \hat{h}_{ij} \mathcal{F} N_{jk}(\vec{y}) \mathcal{F}^{-1} \hat{v}_k(\vec{\xi}) \quad (4)$$

ここに、 $\mathcal{F}$ は Fourier 変換、 $\mathcal{F}^{-1}$ は Fourier 逆変換を表わす。ここで Fourier 変換の演算子を有限 Fourier 変換に置き換えれば演算子

$$\mathcal{A} = \mathcal{F} N_{jk}(\vec{y}) \mathcal{F}^{-1} \quad (5)$$

は、有限 Fourier 変換の性質から行列と同じ性質を持つ。すなわち、有限次元空間上の線形演算子となる。したがって、積分方程式は、

$$\hat{v}_i(\vec{\xi}) = -\hat{h}_{ij}(\xi) \hat{q}_j(\vec{\xi} - \vec{\xi}_L) - \hat{h}_{ij} \mathcal{A} \hat{v}_k(\vec{\xi}) \quad (6)$$

とまとめられ、反復解法の適用によって解が求められることになる。ただし、 $\mathcal{A}$ の行列としての成分を場に求めることは不要である。実際の数値計算では有限 Fourier 変換は FFT を用いることで、短時間で計算できることが期待できる。

3 解析結果

本論文では、図1に示すように弾性媒質の不均質領域に平面波を照射したときの散乱波問題を扱う。散乱波の放射特性を調べるために、ここでは、図1に示すように不均質領域を観測球面で覆い、観測球面で散乱波の振幅および、方向を調べることにする。

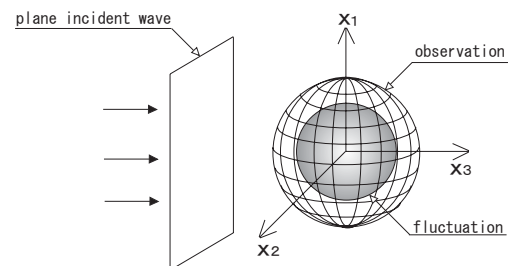


図 1: モデル図

キーワード：領域積分方程式，Fourier 積分変換，forward 散乱解析，Haar 基底，FFT

〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4075)

媒質の揺らぎの空間的な広がりを図 2 に示す。ただし、空間分布図は $x_1 - x_2$ 平面上 (すなわち $x_3 = 0$) でプロットしている。これらの媒質の揺らぎの空間分布図からも明らかなように、媒質の揺らぎは球対称とし、原点付近でピークを持ち遠方へなだらかに減少していく。そして、揺らぎの認められる主要な部分は原点から半径で 6km ほどである。

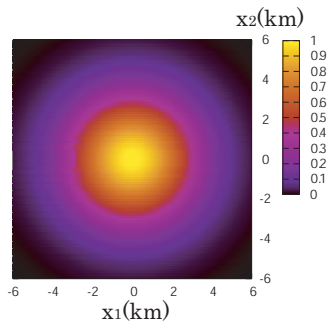


図 2: 揺らぎの空間分布図

Haar 基底を用いた解法、及び FFT を用いた解法により求めた散乱波の様子を図 3、図 4 に示す。ただし、観測球面の半径は 20km とし、平面 P 波が後方から前方へ進行するものとする。

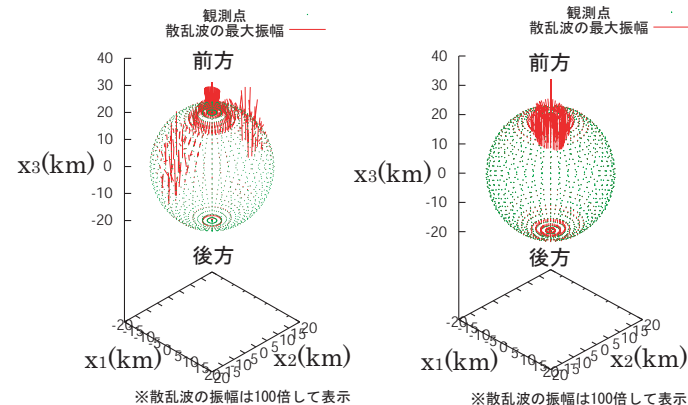


図 3: Haar 基底を用いた解法 図 4: FFT を用いた解法

図 3、図 4 から、赤で示した散乱波の最大振幅の変位ベクトルの向きが、入射波の進行方向と平行していることが分かる。このことから、今回の条件では、P 波を入射させた場合には、P 波を多く含んだ散乱波が生じるということが分かる。また、散乱波の振幅の大きなところは散らばらずに前方に集中していることから、強い指向性を持っている事が分かる。

今回の解析モデルでは、媒質の揺らぎは x_3 軸に対して軸対称であり、かつ、P 波は x_3 軸方向に伝播している。このために、散乱波は x_3 軸に対して軸対称でなければならない。しかし、図 3 の Haar 基底を用いた解法では、側方

に、軸対称でない散乱波が発生している。Haar 基底を用いた解法は、波数空間に様々な解像度の基底を非一様に埋め込まなければならない。このため、数値計算の過程で誤差を生じているものと考えられる。図 4 によれば、FFT と反復解法を組み合わせた手法では、Haar 基底を用いた手法の問題は見られず、好ましい結果を得ている。

各解法での演算時間を以下に示す。

表 1: 各解法での演算時間

解法	演算時間
Haar 基底を用いた解法	約 1 時間 40 分
FFT を用いた解法	約 10 分

演算時間を比べると、表 1 から明らかなように、FFT を用いた解法のほうが演算時間が短く、短時間で計算できることが分かる。ただし、Haar 基底を用いた解法は IBM p Series 690(32CPU)、FFT を用いた解法では AMD Opteron 2.4GHz プロセッサ搭載の PC(4CPU) を用いて計算を行っている。また、FFT の計算には ACMLライブラリ²⁾を用いている。解法ごとに異なる計算機を用いているため、単純には比較できないが、FFT を用いた解法は短い演算時間で答えを出すことができる。

4 結論

本論文は、弾性波動場での揺らぎの性状を変化させた場合の散乱波の解析手法として、Haar 基底を用いた手法、及び FFT と反復解法を組み合わせた手法について検討を行った。この検討によって、FFT と反復解法を組み合わせた手法は、非常に効果的な積分方程式の解析を実現することが明らかになった。数値実験によって得られた知見は以下のとおりである。

- 1. Haar 基底を用いた解法と FFT を用いた解法では、離散化誤差による波動を抑えられる事から、FFT による解法の方がより優れている。
- 2. FFT を用いた解法は、Haar 基底を用いた解法と比べて演算時間が短く、短時間で計算を終えることができるため、演算時間の点でも優れている。

参考文献

1) 東平光生: Fourier 積分変換を用いた領域積分方程式法による揺らぎをもつ弾性波動場の解析, 土木学会論文集 A, Vol.62, No.4

2) <http://www.amd.com/acml>