重合メッシュ法によるはり要素と平面要素の連成解析

京都大学 学生会員 ○ 太田 篤志
京都大学 正会員 小野 祐輔

1. 背景と目的

独立した複数の有限要素メッシュを重ね合わせせることで解析を行う重合メッシュ法 (the Overlaying Mesh Method または s-version FEM) という手法がある．重合メッシュ法では解析領域全体を粗いメッシュで分割しておき，高い精度が求められる一部の範囲にのみ細かく分割したメッシュを重ね合わせることで解析を行うことができる．また，異なる材料特性を持っている場合も解析することができるので，複雑なモデルでのメッシュ作成方法としても利用される．

しかし，重合メッシュ法は，マルチスケール解析の手法として提案されたものであるため，はり要素と平面要素といった異なる要素間での適用は考えられていない．そこで，本研究でははり要素と平面ひずみ要素という異なる要素間に重合メッシュ法を適用を試みる．

2. 重合メッシュ法の理論

重合メッシュ法においては，解析領域全体を分割したメッシュと，解析領域内の任意の領域を異なるメッシュで分割し重ね合わせて解析を行う．全体領域をグローバル領域，異なるメッシュに分割した領域をローカル領域と呼ぶ．グローバル領域 Ω^G とローカル領域 Ω^L 内ではそれぞれ独立に変位場が定義されており，領域 Ω^L 内では，実際の変位は領域 Ω^G における変位 u_i^G と領域 Ω^L における変位 u_i^L の和で定義され，ローカルな領域とグローバルな領域が重ならない領域では変位 u_i はグローバルな領域の変位 u_i^G に等しい．

$$u_i = u_i^G + u_i^L \quad \text{in} \quad \Omega^L \tag{1}$$

ひずみも変位と同様に領域 Ω^G における変位 ε_{ij}^G と領域 Ω^L における変位 ε_{ij}^L の和で定義される．

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^G + \varepsilon_{ij}^L \tag{2}$$

ここで仮想仕事の原理の式にこれらの式を代入すると以下の式が得られる．

$$\int_\Omega \delta(\varepsilon_{ij}^G + \varepsilon_{ij}^L) D_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^G + \varepsilon_{kl}^L) d\Omega = \tag{3}$$
$$\int_\Omega \delta(u_i^G + u_i^L) b_i d\Omega + \int_\Gamma \delta(u_i^G + u_i^L) t_i d\Gamma$$

この式を節点変位 $\bar{u}^G, \bar{u}\ L$ で整理すると，解くべき方程式は以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} K_{AD}^G & K_{AE}^{GL} \\ K_{BD}^{LG} & K_{BE}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_D^G \\ \bar{u}_E^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_A^G \\ \bar{f}_B^L \end{Bmatrix} \tag{4}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
K_{AD}^G &= \int_{\Omega^G} B_{ijA}^G D_{ijkl} B_{klD}^G d\Omega \\
K_{AE}^{GL} &= \int_{\Omega^L} B_{ijA}^G D_{ijkl} B_{klE}^L d\Omega \\
K_{BD}^{LG} &= \int_{\Omega^L} B_{ijB}^L D_{ijkl} B_{klD}^G d\Omega \\
K_{BE}^L &= \int_{\Omega^L} B_{ijB}^L D_{ijkl} B_{klE}^L d\Omega \\
\bar{f}_A^G &= \int_{\Omega^G} N_{iA}^G b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_{iA}^G t_i d\Gamma_t \\
\bar{f}_B^L &= \int_{\Omega^G} N_{iB}^G b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_{iB}^G t_i d\Gamma_t
\end{aligned} \tag{5}$$

であり，K_{AD}^G, f_A^G，K_{BE}^L，f_B^L はそれぞれ領域 Ω^G,Ω^L の通常の FEM の剛性マトリクス，荷重ベクトルと全く同じものになる．

3. はり要素と平面ひずみ要素の重ね合わせ

同要素間での重合メッシュ法では連成項 K^{GL}, K^{LG} は式 (5) より求めることが多い．しかし，異なる要素間の場合用いるひずみが異なるため，この方法を用いることができない．そこで次のような方法を用いる．ローカル節点におけるグローバル変位 u'^G をグローバルの形状関数 N^G とグローバルの節点変位 $\bar{u}^G$ を用いてもとめる．

$$u'^G = N^G \bar{u}^G \tag{6}$$

この u'^G とローカルの B^L を用いてグローバルひずみ ε^G を求めることができる．

$$\varepsilon^G = B^G \bar{u}^G = B^L u'^G = B^L N^G \bar{u}^G \tag{7}$$

従って，K^{LG} は以下のようにして求められる．

$$\begin{aligned}
K^{LG} &= \int_{\Omega^L} B^L D B^L N^G d\Omega^L \\
&= \int_{\Omega^L} B^L D B^L d\Omega^L N^G = K^L N^G
\end{aligned} \tag{8}$$

この方法の利点として，

- はり要素と平面要素といった異なる要素間でも適用することができる．
- ローカル要素が複数のグローバル要素にまたがっている場合でも，同じ計算量で K^{LG}, K^{GL} を求めることができる．

キーワード 有限要素法 (FEM), 重合メッシュ法，斜杭
連絡先 京都市西京区京都大学桂, atsushi@quake2.kuciv.kyoto-u.ac.jp

4. 平面要素とはり要素の重ね合わせによる解析

鉛直杭の解析として (図 1) のようなモデルの通常の FEM 解析と重合メッシュ法による解析をおこなった．各材料の物性値は．杭のヤング率, 断面積, 断面 2 次係数は それぞれ, $206GPa$, $0.009628m^2$, $7.86e^{-5}m^4$, 地盤, フ− チングのせん断波速度, 単位体積重量, ポワソン比は $300m/s$, $1.7tf/m^3$, 0.3 とし, CG 法を用いて解を求めた. 節点数, 要素数, 解析時間は以下のとおりである. ローカルモデルとして，はり要素の周りを平面要素で覆ったものを利用した．これはローカル要素だけだとグローバル領域からうまく力が伝わらないためである.

鉛直杭モデル	節点数	要素数	解析時間
通常の FEM	2091	2040	54 s
重合メッシュ法	1891 +522	1800 +488	21 s

解析結果としてはり要素の変位は (図 5, 6, 7) のような結果が得られ，また, 他の部分も通常の FEM と重合メッシュ法では非常に近い値 が得られた．

同様の条件ではりを外側に 30° 傾けたモデル (図 2) の解析をおこなった．各物性値は鉛直杭と同じものを使用し, 通常の FEM と重合メッシュ法のそれぞれのメッシュは (図 3, 4) のようにした. 節点数, 要素数, 解析時間は以下のとおりである.

斜杭モデル	節点数	要素数	解析時間
通常の FEM	2413	2368	52 s
重合メッシュ法	1891 +986	1800 +936	100 s

重合メッシュ法ではグローバル，ローカルで別々のメッシュを作成しそれらを組み合わせればいいのでメッシュ作成が簡単になる．しかし，K^{GL}, K^{LG} の項が必要なため剛性マトリクスの作成までの工程が増え，計算時間が長くなるが，今回の解析では CG 法による収束計算の影響 が大きく，

鉛直杭では計算時間は短くなり，斜杭では長くなった．また，変位応答は特に回転変位はにおいて小さくなっており，鉛直杭ほど通常の FEM と近い解を得ることができなかった．

5. 結論と今後の課題

今回の研究で得られた知見をまとめると以下の通りである．

- 重合メッシュ法の連成項 K^{GL}, K^{LG} をグローバル変位とローカル要素を用いて求める方法を提案した．
- ローカル要素にはり要素を用いる場合，はり要素の周りに平面要素を付け加える必要がある
- はり要素を用いた重合メッシュ法でメッシュ作成のを簡略化できる

今後の課題として精度の向上と動的解析への適用が挙げられる．

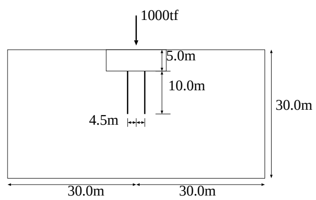

図 1: 鉛直杭の解析モデル

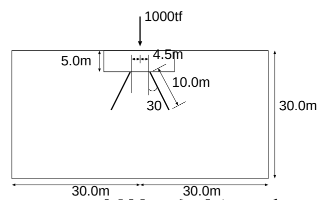

図 2: 斜杭の解析モデル

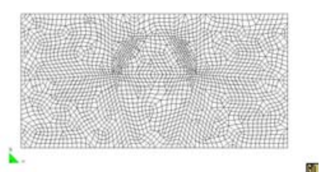

図 3: 通常のメッシュ

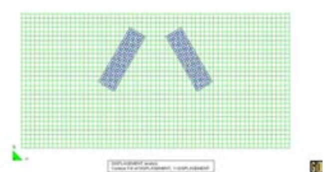

図 4: 重合メッシュ法を用いたメッシュ

鉛直杭の解析結果

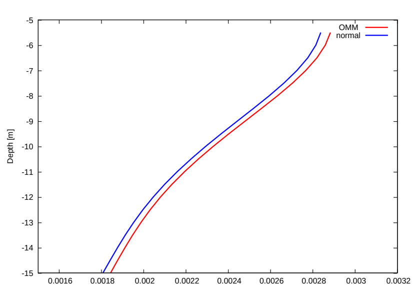

図 5: 水平変位

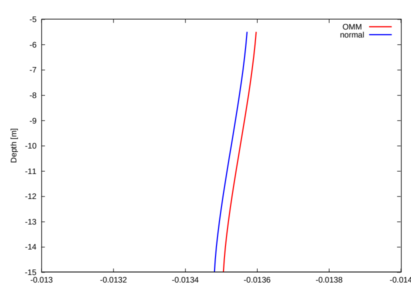

図 6: 鉛直変位

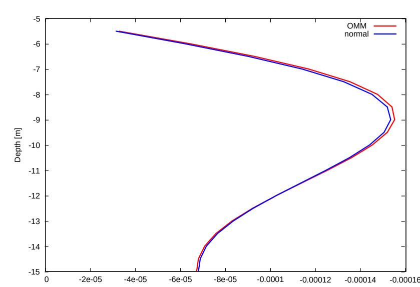

図 7: 回転変位

斜杭の解析結果

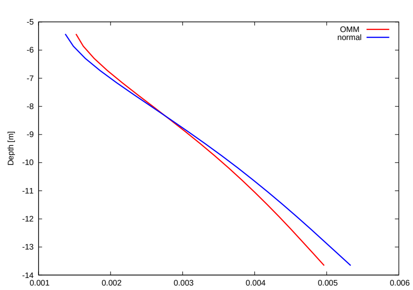

図 8: 水平変位

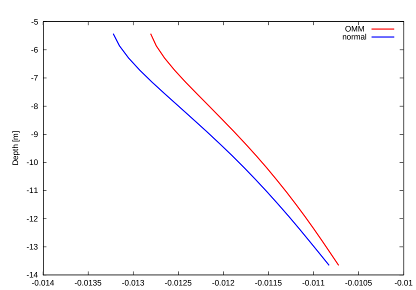

図 9: 鉛直変位

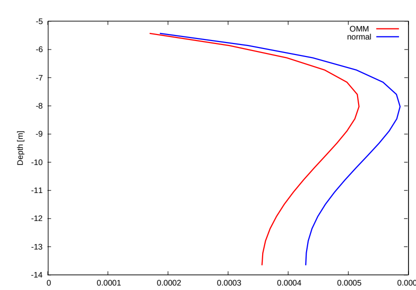

図 10: 回転変位