

新たな弾性理論に基づく応力評価法

—— 従来の弾性理論からの脱却 ——

琉球大学工学部 正会員 ○仲座 栄三

1. はじめに

従来の弾性学は、平均垂直応力、偏差応力、熱応力等を定義付けることに基礎理論の礎を置いていると言える。しかしながら、物理学ではそうした物理量は定義されていないようである。この事実は、弾性学におけるこうした応力の定義が単に経験的あるいは数学的なものとなっていることを示唆させる。同時に、このことは、従来の弾性学において、偏差応力やそれに基づくせん断歪みエネルギーなどが材料の降伏基準や強度等を考える上で重要な位置づけにあることへも疑義を投げさせる。

仲座(2005)¹⁾は、物理学に基づき、内部応力に熱力学的に定義される圧力と Hooke の法則に規定される機械的弾性応力の2つを認めた新しい弾性理論を提唱している。その理論においては、「材料の降伏や材料の耐力に関わる応力評価に、偏差応力や熱応力など、従来の定義に従う応力やエネルギーを用いるべきでなく、新しく提案されている機械的弾性応力を用いなければならない」ことが主張されている。本稿は、新しく提案される理論の特徴と従来の理論の問題点について整理するものである。

2. 新たな弾性理論と応力評価法

熱平衡状態にあるいかなる材料にあっても、熱力学の関係式は満たされている必要がある。材料を熱平衡条件下で順静的に熱するとき、材料は一般に膨張を示す。熱力学は、材料内部に圧力の存在を主張する。したがって、熱力学的に材料の内部応力として“圧力”が定義される。つづいて、Hooke の法則は、材料の相対的微小変形に比例し内部応力が発生することを主張する。材料を等方性と仮定すると、いかなる相対的微小変形に対しても弾性係数は同じでなければならず、Hooke の法則に唯一つの弾性係数が定義される。数学的には、内部応力発生に関わる材料の相対的微小変形量を歪みテンソルを持って表し得る。したがって、材料が相対的な微小変形を受けている時の内部応力は、テンソルを用い次式で表される。¹⁾

$$s_{ij} = -pd_{ij} + 2Ge_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ここに、 s_{ij} は内部応力テンソル、 e_{ij} は歪みテンソル、 p は熱力学的に定義される圧力の微小変動量、 d_{ij} はクロネッカーのデルタである。右辺第2項が Hooke の法則に規定され機械的な作用として生じる“弾性応力”を表す。弾性係数 G は、状態変数(熱力学的には p および T) の関数であり得るので、 $G = G(p, T)$ なる関係にある。ここに、 T は温度である。式(1)に示す構成方程式は、“内部応力が全く異なる物理から生じる2つの応力で構成される”ことを意味する。したがって、材料の内部応力の物理的評価においては、これら2つの応力が別々の物理的視点から検討される必要がある。

3. 縦方向1軸圧縮試験の際、横方向の応力はゼロか？

この単純な問は、従来の弾性理論の真価を問うほどの意味を持つと思われる。従来の弾性理論は、この問に明確にゼロであると答える。しかし、供試体の端面摩擦を取り除いた試験に対し、脆性材料は縦方向に亀裂を走らせ破壊に至る。真っ直ぐ載荷方向に走る亀裂であるから、せん断応力のなせる業でないことははっきりしている。従来の弾性理論は、横方向の応力をゼロとしているので、この現象をうまく説明できていない。

同様な問題が、熱を受けている材料の変形に対しても生じる。熱を受けて膨張している材料に対し、従来の

キーワード 弾性学, 熱力学, Hooke の法則, 圧力, 弾性応力

連絡先 〒903-0213 沖縄県西原町千原1番地 琉球大学工学部環境建設工学科

Tel: 098-895-8673 E-mail: enakaza@tec.u-ryukyu.ac.jp

弾性理論は内部応力をゼロと評価する．この場合，“熱応力”が別に定義され，その応力の存在で熱膨張が説明される．しかしながら，ここで熱応力を新たに導入することは，応力評価に一貫性を失うに通じる．

それでは，新たな理論に則るとき，これらのことはいかように説明されるのだろうか？

まず，仲座の理論は，材料を縦方向に圧縮したり引っ張ったりしたときに材料が見せる横方向の変形の正体を，内部圧の変化がもたらす等方変形であると説明する．例えば，ゴム風船を膨らませる内部応力は圧力である．また，その圧力に耐える応力はゴムの弾性応力である．内部圧を高めるとゴム風船はいずれ破壊を見せる．

外力のみでなく圧力も材料の変形をもたらすので，式(1)の圧力項を左辺に移動し，次式を得る．

$$s_{ij} - (-pd_{ij}) = 2Ge_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

これが，応力(左辺)と変形(右辺)との関係を表す Hooke の法則である．

いま， x_1 軸方向の 1 軸圧縮を考えると， x_2 軸方向，すなわち横方向には，次なる関係が与えられる．

$$p = 2Ge_{22} \quad (3)$$

こうして，圧力が横方向の変形を引き起こすことを理論的に示せる．

材料が破断した時の横方向歪み量 e_{22} を測定することで，その時の圧力変動量は求まる．また，その圧力に耐え得た弾性応力 $2Ge_{22}$ が材料の破壊時の材料強度を表す．材料の変形が熱を伴う場合であっても，熱変化が引き起こす圧力変化 p が材料の等方的弾性変形を引き起こしたと説明され，熱応力という特別な応力の導入を必要としない．したがって，熱を伴いかつ複合応力場であっても，材料の耐力診断のための応力評価は，一貫性を持ち，Hooke の法則に則り機械的弾性応力を調べるのみで十分となる．

材料の耐力評価に参照される弾性応力分布は，式(2)の右辺に示されるように，単純に歪み分布と対応する．すなわち，材料が相対的変形を受ける箇所には必ず何らかの機械的ストレスが作用していなければならないことを示すものとなっている．

4．おわりにあたって

従来の弾性理論が主張する内部応力の構成方程式は次のように与えられる．

$$s_{ij} = Ke_{kk}d_{ij} + 2G\left(e_{ij} - \frac{e_{kk}}{3}d_{ij}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

ここに， K は体積弾性係数である．式(4)を式(2)の形に書くと，

$$s_{ij} - \frac{s_{kk}}{3}d_{ij} = 2G\left(e_{ij} - \frac{e_{kk}}{3}d_{ij}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5)$$

式(4)の右辺第1項が平均垂直応力に対応し，その負値は平均圧力あるいは静水圧応力と呼ばれる．式(5)の左辺は，よく考えてみると，測定される応力から垂直応力の“平均値”を差引いて，内部応力の平均応力からのズレを見ているだけである．すなわち，経験的な整理にすぎないことは否めない．したがって，右辺に示す偏差応力も特段に物理的意味を有するものでないことは明白である．

従来の弾性理論に従うと，材料の歪み分布が分かっているにもかかわらず，耐力評価に必要な応力場は，上記の構成方程式(4)に則り算出しなければならない．加えて，熱を伴う場合には熱応力の分布を知る必要がある．特に，1 軸圧縮試験の際に，最大主応力がゼロのままで，最大主歪み面に沿って材料の破壊が生じることを考えると，こうした従来の応力評価手法の妥当性には疑義を投げざるを得ない．

以上をまとめると，数値計算等で材料の主応力分布あるいは偏差応力分布を求めそれを表示しても，材料の耐力評価に必要な物理的情報を与えるものでなく，正しくは，材料の状態変数となる圧力変動や温度分布，それに Hooke の法則に支配される機械的弾性応力の分布を表示すべきであると結論される．

参考文献

- 1) 仲座栄三(2005): 物質の変形と運動の理論，ボーダインク，421p.
- 2) ランダウ＝リフシッツ(佐藤・石橋 訳)(1972): 弾性理論，東京図書出版，pp.275.