Absolute Nodal Coordinate 法に関する一考察

東京電機大学大学院　学生員　○穂川　ゆき子
東京電機大学大学院　正会員　　井浦　雅司

1．はじめに

Shabana[1]により提案された Absolute Nodal Coordinate Method（以後，ANC 法）は通常の有限要素法に比べ精度が高いばかりでなく，3 次元動力学解析において質量マトリックスが定数となることから，多体動力学解析[2]において注目されている．しかしながら，ANC 法における変数間の従属関係に関しては，これまであまり議論されていないようである．本研究では，ANC 法における変数間の従属性が計算結果に与える影響について調べることを目的とする．

2．Absolute Nodal Coordinate 法の定式化

2.1．梁要素の節点座標

図 -1 に示す 1 次元部材を考える．部材の図心軸上の任意点 P の位置ベクトル **r** は次式により得られる．

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}\mathbf{e} \tag{1}$$

ここで **e** は梁の節点ベクトルであり次式で与えられる．

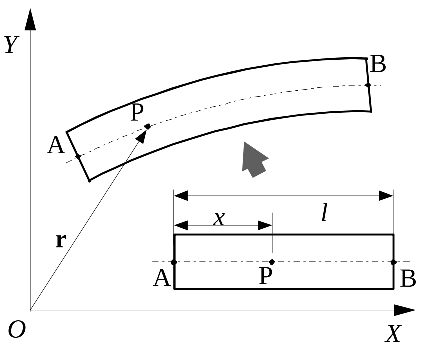

図 -1　梁要素の変形

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

e_1 と e_2 は A 点，e_5 と e_6 は B 点での X 座標と Y 座標を表し，e_3 と e_4 は A 点，e_7 と e_8 は B 点での勾配を表している．勾配を表す e_3，e_4，e_7，e_8 は，節点の角度と軸方向の歪みを用いて次のように表すことができる．

$$e_3 = (1+e_A)\cos q_A \quad \text{(3.a)} \qquad e_4 = (1+e_A)\sin q_A \quad \text{(3.b)}$$
$$e_7 = (1+e_B)\cos q_B \quad \text{(3.c)} \qquad e_8 = (1+e_B)\sin q_B \quad \text{(3.d)}$$

ここで，e_A と e_B は節点 A，B における軸方向の歪みである．また，q_A と q_B は節点 A，B における図心軸と X 軸とのなす角度を表している．形状関数 **S** は，

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3x^2+2x^3 & 0 \\ 0 & 1-3x^2+2x^3 \\ l(x-2x^2+x^3) & 0 \\ 0 & l(x-2x^2+x^3) \\ 3x^2-2x^3 & 0 \\ 0 & 3x^2-2x^3 \\ l(x^3-x^2) & 0 \\ 0 & l(x^3-x^2) \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

と表され，ここで l を変形前の部材の長さ，x を節点 A から点 P までの距離とすると，$x = x/l$ と表される．

2.2．質量マトリックス

部材の運動エネルギーは位置ベクトルを用いて次式で求められる．

$$T = \int \frac{1}{2} r \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV \tag{5}$$

ここで，r は部材の密度である．形状関数 **S** を用いると，質量マトリックス **M** は次のように表すことができる．

$$\mathbf{M} = A_r \int_0^l \mathbf{S}^T \mathbf{S} dx \tag{6}$$

ここで A_r は部材の単位長さあたりの質量である．

2.3．剛性マトリックス

<u>伸び変形による弾性力</u>

部材の軸方向の変形に対する歪みエネルギー U_l は次式により求められる．

$$U_l = \frac{1}{2}\int_0^l EAe^2 dx \tag{7}$$

ここで，軸方向の歪み e は，変形後の部材長を l_d とすると $e = (l_d - l)/l$ と表せる．

歪みエネルギー U_l の求め方はこれまで様々な手法が提案されているが，ここでは文献 2) の手法を用いて歪みエネルギー U_l を計算する．この時，部材軸方向力 $\mathbf{F}_l$ と節点ベクトル **e** との関係は次式のように表される．

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{K}_l \mathbf{e} \tag{8}$$

<u>曲げ変形による弾性力</u>

曲げ変形に対する歪みエネルギー U_t は次式により求められる．

$$U_t = \frac{1}{2}\int_0^l EIk^2 dx \tag{9}$$

ここで k は曲率であり，軸方向変位が微小であると仮定すると，曲率は次式より求められる．

$$k^2 = \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2}\mathbf{e}\right)^2 \tag{10}$$

文献 2) により，梁の曲げ変形に対する弾性力 $\mathbf{F}_t$ は次式のように表される．

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{K}_t \mathbf{e} \tag{11}$$

以上より，部材の変形による弾性力 **F** は，伸びによる弾性力と曲げによる弾性力を足したものとなり，部材の運動方程式は次式のように表される．

Key word　有限要素法，ANC 法，幾何学的非線形
連絡先　〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂 東京電機大学 大学院理工学研究科 建設環境工学専攻 TEL 049-296-2911

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}}+(\mathbf{K}_l+\mathbf{K}_t)\mathbf{e}=\mathbf{Q} \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{Q}$ は外力である．

3．ANC 法の問題点

従来，ANC 法においては，$e_1 \sim e_8$ の変数は独立変数として扱われている．しかし式 (3) より，変数間に以下の関係が成立することがわかる．

$$e_3{}^2+e_4{}^2=(1+e_A)^2 \quad , \quad e_7{}^2+e_8{}^2=(1+e_B)^2 \tag{11}$$

すなわち，e_3，e_4 および e_7，e_8 は，独立変数でないことがわかる．そのため，これらの従属関係が数値結果に及ぼす影響について調べることとする．

4．ラグランジュ乗数を用いた拡大法

拘束条件式を入れる方法として，ラグランジュ乗数を用いた拡大法がある[3]．まず，式 (10) に速度変数 $\mathbf{v}$ を導入し，拘束条件を考慮した運動方程式は次式のようになる．

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}=\mathbf{v} & (12.a)\\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}+\mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{Q}-(\mathbf{K}_l+\mathbf{K}_t)\mathbf{e} & (12.b)\\ \mathbf{g}=0 & (12.c) \end{cases}$$

ここで λ はラグランジュの未定乗数，$\mathbf{g}$ は拘束条件式であり，$\mathbf{G}=\partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{e}$ は拘束条件式のヤコビアンマトリックスである．次に，式 (12.c) を時間に関し 2 回微分し整理した結果，以下の式を得る．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}-(\mathbf{K}_l+\mathbf{K}_t)\mathbf{e} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

この式 (13) の第 1 式に $\mathbf{GM}^{-1}$ をかけて，式 (13) の第 2 式に代入すると λ が以下のように求められる．

$$\boldsymbol{\lambda}=(\mathbf{GM}^{-1}\mathbf{G}^T)^{-1}\left[\mathbf{GM}^{-1}\{\mathbf{Q}-(\mathbf{K}_l+\mathbf{K}_t)\mathbf{e}\}-\boldsymbol{\gamma}\right] \tag{14}$$

次に式 (14) の λ を用いて式 (13) より $\dot{\mathbf{v}}$ を求めると以下のようになる．

$$\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{M}^{-1}\left[\{\mathbf{Q}-(\mathbf{K}_l+\mathbf{K}_t)\mathbf{e}\}-\mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda}\right] \tag{15}$$

ここで，式 (15) の右辺を $\mathbf{F}(\mathbf{e},\mathbf{v},t)$ とおくと，以下のような常微分方程式を得る．

$$\dot{\mathbf{y}}=\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F}(\mathbf{e},\mathbf{v},t) \end{Bmatrix} \tag{16}$$

式 (16) は通常の 1 階常微分方程式であり，ここでは 4 次の Runge-Kutta 法を用い数値解析を行った．

5．数値解析

5.1．初期条件

無重力状態で，図 -2のような 1 次元部材の A 点に Y 軸方向に初速度 (v_2=20) を与える問題を考える．材料特性，および初期条件は表 -1，および表 -2 に示す値を用いた．

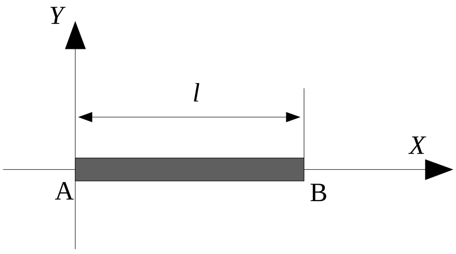

図 -2　梁要素のモデル

表 -1　材料特性

条件	EA	EI	A_r	l
①	12000000	10000000	72	150
②	10000	500	1	150

表 -2　初期条件

条件	刻み幅	要素数	拘束条件	材料特性
I	0.03	3	無	①
II	0.03	3	有	①
III	0.03	8	無	②
IV	0.03	10	無	②

5.2．計算結果

表 -2 に示す I と II の条件下で，A 点での拘束条件式の誤差を比較したものを図 -3 に示す．これより，拘束条件式を入れない場合でも，誤差は発散することなく振動していることがわかった．

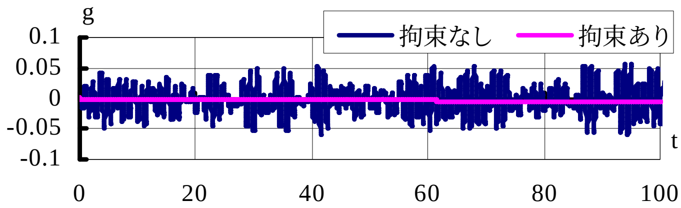

図 -3　拘束条件式有りと無しの誤差の比較

次に，表 -2 に示す III と IV の条件下で，1 次元部材の変形を時間毎に比較したものを図 -4 に示す．ここで，点線は初期位置を示している．これより，8 要素と 10 要素との結果はほぼ同一であるものの，t=33 以降に差異が見られることがわかった．

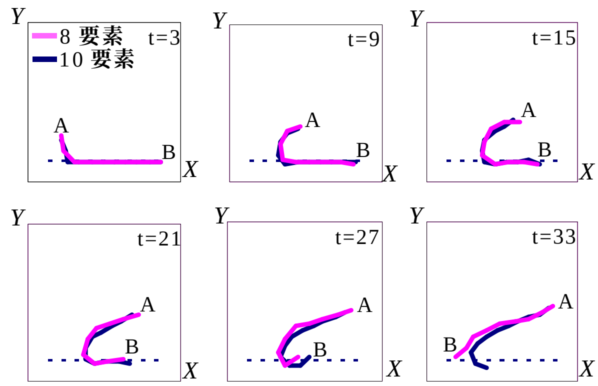

図 -4　部材の動きの比較

6．まとめ

本研究では，ANC 法における変数間の従属関係が数値解に与える影響について調べた．本解析例によれば，拘束条件を考慮しない従来の手法でも，拘束条件は満足されないものの，誤差は発散することなく振動していることが確認された．

参考文献

1) Shabana, A.A., Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments, Journal of Multibody System Dynamics, 1-2(1997),pp 189-222.

2) 高橋義考・清水信行, Absolute Nodal Coordinate法による梁の多体動力学解析に関する研究，日本機械学会論文集(C編)，67 巻 655 号(2001-3),pp626-632.

3) 日本機械学会編，数値積分法の基礎と応用，コロナ社，2004.