B-spline Ritz 法による中実円筒体の 3 次元自由振動解析

大分工業高等専門学校 都市システム工学科 正 員 名木野 晴暢
北海道大学大学院 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 フェロー ○三上 隆
大同工業大学 都市環境デザイン学科 正 員 水澤 富作

1. まえがき

中実円筒体 (以下，円筒体) は，多くの工学分野で基礎的な構造要素として用いられている．円筒体は，種々の複雑な動的外力を受けるとき，その自由振動特性 (固有振動数と固有振動モード) の把握が，構造設計上重要になり，また，これらは，円筒体の動的応答性状の把握に必要不可欠な基礎的な情報となる．

円筒体の自由振動解析では，円筒体の半径に対してその長さが小さくなると，そのより正確な自由振動特性を把握するためには，3 次元弾性論に基づかねばならない．また，既往の研究報告では，軸対称および曲げ振動モードを対象にしたものが多く，大きな円周方向の波数を取り扱った報告例は，比較的少ないように思われる．

本論文では，著者らが提案している B-spline 円筒リング法[1] を一般化した半数値解析的な B-spline Ritz 法 (以下，B-spline Ritz 法) を提示し，これを用いて相対する 2 面で任意の境界条件を有する中実円筒体の 3 次元自由振動解析を行い，本手法の解の収束性および精度比較について検討を行い，本解析法の適用可能性について検討することを目的としている．また，固定面を有する円筒体の振動数に与える円周方向の波数と幾何パラメータの影響についても明らかにしている．

2. B-spline Ritz 法による自由振動問題の定式化

図-1 に示すような円筒体は，等質，等方性かつ微小ひずみである 3 次元弾性論に従うものとし，その運動は調和振動すると仮定する．試行関数に正規化された B-spline 関数 (以下, B-spline 関数) を採用した Ritz 法を用いて，円筒体の自由振動問題を定式化する．

まず，定式化にあたり，次式で表される無次元座標系を導入する．

$$\xi(x) = x / L;\ \eta(\theta) = \theta;\ \zeta(r) = r / R_o \qquad (1)$$

各振幅変位 U, V, W は，円周方向の波数 n を 0 または整数として，B-spline 関数の 2 重積を仮定する．

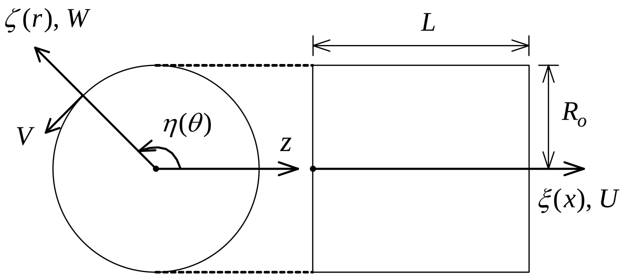


図-1 中実円筒体，座標系および振幅変位方向

$$U = \sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}\sum_{\psi=0}^{1} A_{ml} N_{m,k_\xi}(\xi) N_{l,k_\zeta}(\zeta) \cos(n\eta - \frac{\pi}{2}\psi)\ ;$$

$$V = \sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}\sum_{\psi=0}^{1} B_{ml} N_{m,k_\xi}(\xi) N_{l,k_\zeta}(\zeta) \sin(n\eta - \frac{\pi}{2}\psi)\ ;$$

$$W = \sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}\sum_{\psi=0}^{1} C_{ml} N_{m,k_\xi}(\xi) N_{l,k_\zeta}(\zeta) \cos(n\eta - \frac{\pi}{2}\psi). \qquad (2)$$

ここで, 円周方向の波数 $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, A_{ml}, B_{ml}, C_{ml} は未定係数，$i_\xi = m_\xi + k_\xi - 2,\ i_\zeta = m_\zeta + k_\zeta - 2$ であり，m_ξ, m_ζ と k_ξ, k_ζ は，それぞれ，ξ, ζ 方向に設けた区分点の数および spline 階数である．また，$(\pi/2)$ は位相角であり，$\psi = 0$ および $\psi = 1$ は，それぞれ，$\eta = 0$ の軸に対して振幅変位が対称および逆対称分布することを意味する．

円筒弾性体の全ポテンシャルエネルギーΠは，次式で与えられる．

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max} \qquad (3)$$

ここで, $U_{\max}$ は境界面に導入した仮想ばね[1] に蓄えられる弾性エネルギーを付加した円筒体の最大ひずみエネルギーであり，$T_{\max}$ は最大運動エネルギーである．

したがって，式(2) を式(3) に代入し，このΠを未定係数で極値化すれば，次式の代数方程式が得られる．

$$([\mathrm{K}] - \Omega^2[\mathrm{M}])\{\Delta\} = \{0\} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots, \infty \qquad (4)$$

ここで, $\Omega = \omega R_o (\rho / G)^{1/2}$ は振動数パラメータである．

キーワード 中実円筒体，自由振動解析，B-spline Ritz 法，3 次元弾性論
連絡先 〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目 北海道大学大学院工学研究科 TEL: 011-706-6176

3. 数値計算例および考察

ここでは，3 次元弾性論に基づく中実円筒体の自由振動解析への本解析法の適用可能性について検討するために，本手法の解の収束性および精度比較について検討する．また，円筒体の振動数パラメータΩ に与える円周方向の波数n と長さ-半径比 L / R_o の影響についても示す．数値計算例では，spline 次数 $(k_\xi - 1) \times (k_\zeta - 1)$ を 4 × 3，半径方向の区分点の数 m_ζ を 9 で固定し，ポアソン比$\nu = 0.3$ を用いる．

表−1 には，両端固定された円筒体 $(L / R_o = 3, 6)$ の基本振動数パラメータΩ_{1st} の収束性に与える軸方向区分点の数 m_ξ と円周方向の波数 n の関係が示してある．ここで，m_ξ は 5 から 15 まで変化させており，解の精度比較のために Zhou ら[2)] の数値解も示してある．また，表中の bold の数字は，Zhou ら[2)] の結果に対して誤差 1 % 以内になったことを意味する．これより，本解析法の解の収束状態は，L / R_o と n の値に関わらず，非常に良好であり，また，Ω_{1st} のみを対象とした場合，$L / R_o \leq 6$ の範囲であれば，$m_\xi = 5$ とかなり粗い区分点の数で実用上十分な解析精度が確保できると判断できよう．以後の数値計算例では，かなり長い円筒体を取り扱うため，$m_\xi = 15$ を用いる．

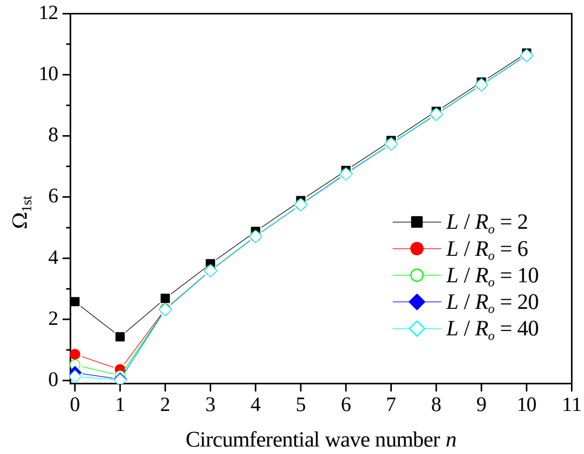
図−2 (a)，(b) には，それぞれ，境界条件が両端固定および片持円筒体の基本振動数パラメータΩ_{1st} に与える円周方向の波数n と長さ-半径比 L / R_o の関係が示してある．これより，L / R_o と境界条件にかかわらず，最小の振動数となるのは，$n = 1$ (曲げ振動モード)であることがわかる．また，非常に長い円筒体 $(L / R_o \geq 20)$ になると，$n = 0$ (軸対称振動モード) と $n = 1$ の Ω_{1st} の値が近接してくる．

4. まとめ

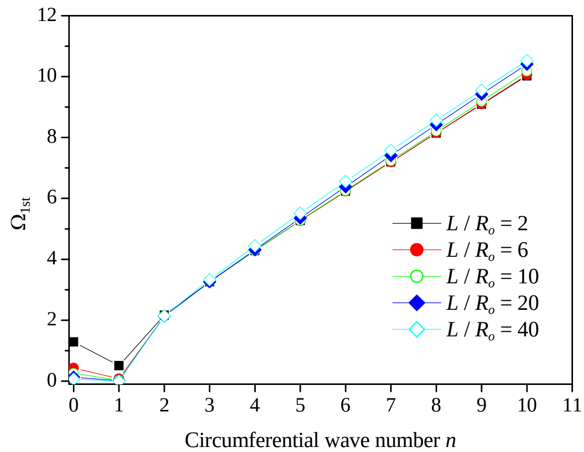
本論文では，中実円筒体の 3 次元自由振動解析への B-spline Ritz 法の適用可能性について検討を行なった．また，円筒体の基本振動数パラメータに与える円周方向の波数と幾何パラメータの影響についても検討した．B-spline Ritz 法は，従来の p-Ritz 法に解析空間領域を分割する概念を加味した区分的な Ritz 法であり，その解の収束状態は非常に良好であり，比較的粗い区分点の数で実用上十分な解析精度が確保できる．また，円筒体では，長さ-半径比と境界条件にかかわらず，曲げ振動モードの基本振動数が，最小の振動数となる．

表−1 両端固定された円筒体の Ω_{1st} の収束性に与える m_ξ の影響と精度比較

L / R_o	m_ξ	Circumferential wave number n				
		0	1	2	5	10
3	5	**1.719**	**0.8983**	**2.458**	5.797	10.66
	7	1.718	0.8974	2.458	5.797	10.66
	9	1.717	0.8971	2.458	5.797	10.66
	11	1.717	0.8969	2.458	5.797	10.66
	13	1.717	0.8968	2.457	5.797	10.66
	15	1.716	0.8967	2.457	5.797	10.66
	Ref. 2	1.716	0.8964	2.457	-	-
6	5	**0.8565**	**0.3558**	**2.341**	5.759	10.64
	7	0.8556	0.3551	2.341	5.759	10.64
	9	0.8551	0.3548	2.341	5.759	10.64
	11	0.8549	0.3547	2.341	5.759	10.64
	13	0.8548	0.3545	2.341	5.759	10.64
	15	0.8547	0.3545	2.341	5.759	10.64
	Ref. 2	0.8543	0.3542	2.341	-	-



(a) Clamped – Clamped



(b) Clamped – Free

図−2 円筒体の Ω_{1st} に与える n と L / R_o の影響

参考文献

1) 名木野晴暢, 三上隆, 水澤富作：構造工学論文集, Vol.52A，pp.89-100，2006.

2) Zhou et al.: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192**, pp.1575-1589, 2003.