BF-spline Ritz 法を用いた斜板の振動解析

大同工業大学　正員　○水澤　富作　大同工業大学大学院　学生員　和田　裕明

１．はじめに　斜スラブ，斜めデッキや翼などの構造要素として用いられる斜板の振動特性を知ることは，設計上重要な課題である．斜板の振動問題では，関数の直交性が成りたたず，また厳密な解を求めることが困難になるので，有限要素法やRitz法などの数値解析法が適用されているが，斜角の増大と共に，鈍角点近傍に生じる応力集中により，解の収束が遅く，また解析結果の値に相違が見られる[1)].

本研究では, 幾何学的境界条件を自動的に満足させる境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を Ritz 法の変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法[2)]を Mindlin 斜板の振動解析へ適用し, 解の収束性や解析精度について検討を行っている．また，種々の境界条件を持つ斜板の振動特性に与える斜角，幅厚比などの影響について明らかにしている．

２．BF-spline Ritz 法の定式化　自動的に幾何学的境界条件を満足する境界関数[2)]と B-spline 関数を変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法を定式化する．次式の無次元斜交標系($\xi = x/a$, $\eta = y/b, w = W/h$)を用いる. ここで, a,b,h は, それぞれ図-1に示すような斜板の長さ, 板幅と板厚である.

$$\phi_x(\xi,\eta) = F_x(\xi)G_x(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}A_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \quad , \quad \phi_y(\xi,\eta) = F_y(\xi)G_y(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}B_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \ ,$$

$$w(\xi,\eta) = F_w(\xi)G_w(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}C_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \qquad \cdots(1)$$

ただし，F_i(ξ)と G_i(η)は，それぞれ境界関数であり，$i_x=k-1+m_x$, $i_y=k-1+m_y$, $N_{m,k}(\eta)$, $N_{n,k}(\eta)$は正規化された B-spline 関数である. ただし, k-1 はspline 関数の次数であり, m_xは x 方向の区分点の数, m_yは y 方向の区分点の数を表す. また, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} はそれぞれ未定係数ベクトルである. 等方性である斜め Mindlin 板のひずみエネルギー Uと運動エネルギーT は，それぞれ次式で与えられる．

$$\begin{aligned} U = \frac{D}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\cos\theta\int_0^1\int_0^1\Biggl\{&\sec^2\theta\left[\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi} - \left(\frac{a}{b}\right)\sin\theta\frac{\partial\phi_x}{\partial\eta} - \sin\theta\frac{\partial\phi_y}{\partial\xi} + \left(\frac{a}{b}\right)\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right]^2 - (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right)\left\{\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)\right\} \\ &+ \frac{1-\nu}{2}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\xi}\right)\right\}^2 + 6\kappa(1-\nu)\left(\frac{b}{h}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\Biggl[\left\{\left(\frac{h}{a}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right) + \cos\theta\phi_x\right\}^2 \\ &+ \left[\phi_y - \sin\theta\phi_x - \left(\frac{h}{a}\right)\tan\theta\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right) + \sec\theta\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)\right]^2\Biggr]\Biggr\}\,d\eta\,d\xi \\ = \frac{D}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\cos\theta\{\Delta\}_{mn}^{T}[K]_{mnrs}\{\Delta\}_{rs} \qquad \cdots(2) \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2}\rho h\omega^2 abh^2\cos\theta\int_0^1\int_0^1\left\{w^2 + \frac{1}{12}(\phi_x{}^2 + \phi_y{}^2 - \sin\theta(\phi_x\phi_y + \phi_y\phi_x)\right\}d\eta\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\{\Delta\}_{mn}^{T}[M]_{mnrs}\{\Delta\}_{rs} \qquad \cdots(3)$$

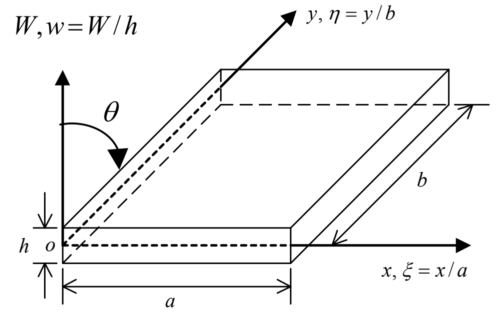

図-１　斜板と斜交座標系

ここで，$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$，θ は斜角であり，$[K]_{mnrs}$と$[\mathrm{M}]_{mnrs}$は，それぞれ剛性行列と質量行列であり，また κ と ν はそれぞれせん断修正係数とポアソン比である．

したがって，Ritz 法を用いて全ポテンシャルエネルギー$\Pi = U - T$ を極値化すれば，次式の代数方程式が導ける．

$$\partial\Pi/\partial\{\Delta\}_{mn} = [K]_{mnrs}\{\Delta\}_{rs} - n^{*2}[M]_{mnrs} = 0, \{\Delta\}_{rs} = \{\{A\}_{rs}, \{B\}_{rs}, \{C\}_{rs}\} \qquad \cdots(4)$$

ここで，n^*は振動数パラメータであり，次式で定義する．$n^* = \omega b^2\sqrt{\rho h/D}/\pi^2 \qquad \cdots(5)$

キーワード　斜板, BF-spline Ritz 法，境界関数，振動解析，Mindlin 板理論

〒457-8532　名古屋市南区白水町 40　都市環境デザイン学科　電話 052-612-5571

３．数値計算例および考察　ここでは，本手法の収束性と精度比較について示す．ただし，ν ＝0.3，κ ＝0.823 を用いる．

表‐1 は, 周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^*の収束性に与える spline 次数 k-1 と区分点の数 $m_x=m_y$ の影響を示している．ここで，斜角θ=45°，幅厚比 b/h=10，辺長比 a/b=1 とし，spline 次数を４次から２次に，また区分点の数は 11 から 35 まで変化をさせている. また, 精度比較のために，Liew らの直交多項式を用いた Ritz 法による数値解 [1]も示してある. これより，区分点の数を増大すると一定値への安定した収束状態が得られており, また spline 次数を高めると, 少ない区分点の数で収束している．その収束値は Liew らの値と比較して，よく一致した結果が得られている．

表‐1 周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^*の収束性に与える spline 次数と区分点の数の影響：θ=45°,B/h=10，a/b=1

k-1	Mx=My	1st	2nd	3rd	4th	5th
4	11	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105
	15	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105
	19	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	23	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	27	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	31	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	35	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
3	11	5.6040	8.4777	11.205	11.786	14.108
	15	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105
	19	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105
	23	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	27	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	31	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	35	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
2	11	5.6051	8.4845	11.231	11.795	14.184
	15	5.6042	8.4793	11.210	11.788	14.122
	19	5.6040	8.4782	11.206	11.786	14.111
	23	5.6039	8.4779	11.205	11.786	14.107
	27	5.6039	8.4778	11.204	11.785	14.106
	31	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.106
	35	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	Liew[1]	5.6040	8.4777	11.204	11.786	14.105

表‐2 には，片持ち斜板の振動数パラメータの精度比較が示してある．ここで，θ=45°，$m_x=m_y$=27，k-1=4 次に仮定し，b/h は 5, 10, 1000 と変化させている．比較のために，Liew らの Ritz 法の値 [1]，Woo[3]と Leung ら [4]の有限要素解(FEM)および Malerkzadeh らの強形式に基づく DQ 法による数値解 [5]が示してある．

表−2　片持ち斜板の振動数パラメータの精度比較：θ=45°,a/b=1

b/h			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
5	BF-spline Ritz method		0.42177	0.96426	2.1038	2.3866	3.6789	4.0959
	Ritz	Liew[1]	0.4226	0.9650	2.1059	2.3869	3.6789	
	FEM	Woo[3]	0.4225	0.9644	2.1001	2.3855	3.6684	
	FEM	Leung(a)[4]	0.4246	0.9676	2.1160	2.3915	3.6922	
	FEM	Leung(b)[4]	0.4241	0.9671	2.1136	2.3911	3.6870	
	PDQM	Malerkzadeh[5]	0.4218	0.9641	2.1033	2.3866	3.6789	4.0953
	HDQM	Malerkzadeh[5]	0.4217	0.9640	2.1032	2.3866	3.6789	4.0952
10	BF-spline Ritz method		0.44335	1.0673	2.5069	2.8615	4.5543	5.2210
	Ritz	Liew	0.4445	1.0678	2.5095	2.8633	4.5547	5.2238
	PDQM	Malerkzadeh	0.4432	1.0666	2.5059	2.8612	4.5545	5.2202
	HDQM	Malerkzadeh	0.4432	1.0666	2.5059	2.8612	4.5545	5.2202
1000	BF-spline Ritz method		0.45660	1.1395	2.7325	3.1921	5.1375	5.9846
	Ritz	Liew	0.4571	1.1404	2.7357	3.1982	5.1385	5.9863
	FEM	Woo	0.4572	1.1478	2.7411	3.2162	5.1364	

これより，幅厚比の値に関係なく，本手法の値は，他の数値解析法により求められた解とよく一致した結果が得られている．

表‐3 は，2 隣辺固定で他の２辺が自由辺である斜板の振動数パラメータの精度比較が示してある．ただし，θ=45°,a/b=1 に仮定している．この問題は，Mindlin 板理論では解かれていないので，3 次元弾性論に基づくチェビシェブ多項式を変位関数に仮定した Ritz 法による値(3-D Ritz)[6]が示してある．これより，本手法の解は，弾性解と良く一致した結果を示している．

表-3 2 辺固定で他の 2 辺が自由辺である斜板の精度比較: θ=45°

b/h	Modes					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
100	0.6273	2.601	3.454	5.619	8.361	8.619
3-D Ritz	0.6274	2.602	3.455	5.622	8.365	8.620
(%)	0.02	0.04	0.02	0.05	0.05	0.02
5	0.5519	2.029	2.296	3.890	4.907	5.262
3-D Ritz	0.5553	2.050	2.316	3.947	4.964	5.340
(%)	0.62	1.04	0.87	1.45	1.15	1.45

４．あとがき　得られた結果をまとめると，次のようになる．(1) BF-spline Ritz 法は，一様な収束性を示し，またその収束値は，解析解や他の数値解析法の値と比較して，良く一致した結果が得られている．(2)本手法で求めた解は他の Ritz 法や有限要素法で得られた結果より小さめの値を示すので，斜板の振動数パラメータのより精度の高い上界値が得られている．

参考文献　1) Liew, K.M.et.al.: Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory. Journal of Sound and Vibration, Vol. 168, pp.39-69, 1993. 2) 名木野他：応用力学論文集, Vol.9,341-352,2006. 3) Woo, K.S.et al.: Vol. 268, pp.637-656, 2003. 4) Leung, A.Y.T. et al.: Journal of Sound and Vibration, Vol. 278, pp.699-703, 2004. 5) Malekzadeh, P. et al.: Engineering Structures, Vol.27, pp. 1563-1574, 2005.　6) Zhou, D. et al: Int. J. Mech. Sci., Vol. 48, pp. 1481-1493, 2006.