

BF-spline Ritz 法を用いた扇形 Mindlin 板の曲げ解析

大同工業大学大学院 学生員 ○和田 裕明 大同工業大学 正員 水澤 富作

1. はじめに 扇形厚板は、曲線スラブや曲線デッキなどの構造要素として用いられており、その曲げ特性を知ることは、設計上重要な課題であるが、薄板問題と比較して、扇形厚板の曲げ解析はさほど多く研究されていない。半径方向の2辺が単純支持された扇形厚板の曲げ問題の厳密解は、Levy 法とベッセル関数を適用した小林ら¹⁾により求められている。しかしながら、任意の境界条件を有する扇形 Mindlin 板の曲げ問題は、有限要素法を用いた結果を除くと、あまり解析されていない。

本研究では、図-1に示すような任意の境界条件を有する扇形 Mindlin 板の曲げ解析への BF-spline Ritz 法⁴⁾の適用について検討を行い、本手法の収束性や解析精度について精査している。また、等分布荷重を受ける扇形厚板の曲げ性状に与える中心角、幅厚比や半径比などの影響を明らかにする。

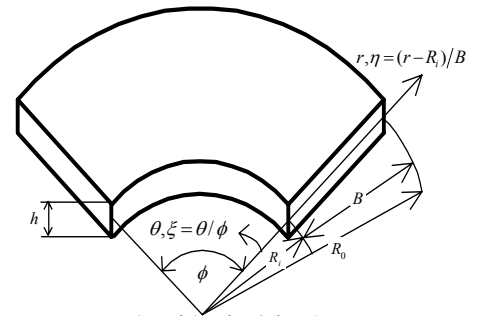


図-1 扇形板と極座標系

2. BF-spline Ritz 法の定式化 自動的に幾何学的境界条件を満足する境界関数と B-spline 関数を変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法を定式化する。次式の無次元化極座標系 $(\xi = \theta/\phi, \eta = (r - R_i)/B, w = W/B)$ を用いる。ここで、 ϕ は中心角、 $B = R_o - R_i$ は板幅であり、 R_o と R_i はそれぞれ扇形板の外径と内径を示す。

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(\xi, \eta) &= F_\theta(\xi)G_\theta(\eta)\sum_{m=1}^{i_r}\sum_{n=1}^{i_\theta}A_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta), \varphi_r(\xi, \eta) = F_r(\xi)G_r(\eta)\sum_{m=1}^{i_r}\sum_{n=1}^{i_\theta}B_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \\ w(\xi, \eta) &= F_w(\xi)G_w(\eta)\sum_{m=1}^{i_r}\sum_{n=1}^{i_\theta}C_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \end{aligned} \quad \cdots(1)$$

ただし、 $F_i(\xi)$ と $G_i(\eta)$ は、それぞれ境界関数であり、 $i_r = k-1+m_r$ 、 $i_\theta = k-1+m_\theta$ 、 $N_{m,k}(\eta)$ 、 $N_{n,k}(\eta)$ は正規化された B-spline 関数である。ただし、 $k-1$ は spline 関数の次数であり、 m_r は半径方向の区分点の数、 m_θ は円周方向の区分点の数を表す。また、 A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} はそれぞれ未定係数ベクトルである。等質かつ等方性である長方形 Mindlin 板のひずみエネルギー U と面外等分布荷重 q による外力ポテンシャル V は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U &= (D\phi/2)\int_0^1\int_0^1\left\{\left\{\left(1/\phi/\eta\right)\left(\partial\varphi_\theta/\partial\xi\right)+\left(\varphi_r/\eta\right)\right\}^2+\left(\partial\varphi_\theta/\partial\eta\right)^2+2\nu\left\{\left(1/\phi/\eta\right)\left(\partial\varphi_\theta/\partial\xi\right)+\left(\varphi_r/\eta\right)\right\}\left(\partial\varphi_r/\partial\eta\right)\right. \\ &\quad \left.+0.5(1-\nu)\left\{\left(\partial\varphi_\theta/\partial\eta\right)+\left(1/\eta/\phi\right)\left(\partial\varphi_r/\partial\xi\right)-\left(\varphi_\theta/\eta\right)\right\}^2+6(1-\nu)\kappa(B/h)^2\left[\left\{\left(1/\phi/\eta\right)\left(\partial w/\partial\xi\right)+\varphi_\theta\right\}^2+\left\{\left(\partial w/\partial\eta\right)+\varphi_r\right\}^2\right]\right\}\cdot A\,d\xi\,d\eta \\ &= \frac{D\phi}{2}\{\Delta\}_{mn}^T[K]_{mnr}\{\Delta\}_{rs} \end{aligned} \quad \cdots(2)$$

$$V = \phi q B^2 h \int_0^1 \int_0^1 w A d\xi d\eta = \phi q B^2 h \{f\} \{\Delta\}_{mn} \quad \cdots(3)$$

ここで、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 $A = (\eta + R_i/B) = \{\eta + 1/(\delta - 1)\}$ 、 $\delta = R_o/R_i$ で、 $[K]_{mnr}$ と $\{f\}$ は、それぞれ剛性マトリックスと外力ベクトルであり、 κ と ν はそれぞれせん断修正係数とポアソン比である。

したがって、Ritz 法を用いて全ポテンシャルエネルギー $\Pi = U - V$ を極値化すれば、次式の代数方程式が導ける。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\}_{mn}} = [K]_{mnr} \{\Delta\}_{rs} - \{f\} = 0, \{\Delta\}_{rs} = \{\{A\}_{rs}, \{B\}_{rs}, \{C\}_{rs}\} \quad \cdots(4)$$

なお、扇形 Mindlin 板の曲げモーメント、ねじりモーメントとせん断力は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M_\theta &= D \left[\frac{1}{r} \left\{ \phi_r + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right\} + \nu \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right], M_r = D \left[\frac{\nu}{r} \left\{ \phi_r + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right], M_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} - \phi_\theta \right\} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} \right], \\ S_\theta &= \kappa G h \left(\phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), S_r = \kappa G h \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad \cdots(5)$$

キーワード 扇形厚板, BF-spline Ritz 法, 境界関数, 曲げ解析, Mindlin 板理論

〒457-8532 名古屋市南区白水町 40 都市環境デザイン学科 電話 052-612-5571

3. 数値計算例および考察

0.3, $\kappa = 5/6$ を用いる.

表 - 1 は, 2つの直線辺が単純支持され, 他の円弧辺が種々の境界条件を持つ扇形厚板のたわみ及び断面力の収束性に与える区分点の数 $m_\theta = m_r$ の影響が示してある. ここで, 中心角 $\varphi = 60^\circ$, 半径比 $R_0/R_i = 2.0$, 幅厚比 $B/h = 10$ とし, 区分点の数は 15 から 35 まで変化をさせている. また, 精度比較のために, 小林らの厳密解¹⁾と後藤らの spline 選点法の数値解²⁾も示してある. これより, 区分点の数を増やすと一定値へ安定した収束性が得られており, 厳密解とよく一致した結果が得られている.

表 - 2 には, 周辺固定された扇形厚板のたわみおよび断面力の収束性に与える区分点の数の影響が示してある. ここで, 中心角 $\varphi = 60^\circ$, 半径比 $R_0/R_i = 2.0$ に仮定し, 幅厚比 B/h は 10 と 1000 である. 区分点の数は 5 から 31 まで変化させている. また比較のために, 望月ら³⁾の spline 要素法(SEM)の結果が示してある. 幅厚比に関係なく, 区分点の数を増大すると, たわみと断面力は良好な収束性を示しており, また SEM の数値解と比較して, 良く一致した結果が得られている. また, 図-2 には, 中央断面($\xi = 0.5$)でのたわみの分布に与える中心角 φ の影響が示してある. ここで, R_0/R_i は 2 また B/h は 10 に仮定している. これより, 中心角を増大するとたわみは大きくなるが, 中心角を小さくすると, 分布の非対称性が顕著に見られる.

4. あとがき

得られた結果をまとめると, 次のようになる.

- (1) 本手法を用いれば, 任意の境界条件を有する扇形 Mindlin 板の曲げ解析が可能である.
- (2) 区分点の数を増やすと, 解の安定した収束状態が示され, またその収束値は, 厳密解や数値解と良く一致した結果が得られている.

参考文献

- 1) Kobayashi, H. and Turvey, G.J.: Elastic small deflection analysis of annular sector Mindlin plates. Int. J. Mech. Sci., Vol. 36, 811-827, 1994.
- 2) 後藤, 水澤: Spline選点法を用いたMindlin板の曲げおよび振動解析, 応用力学論文集, Vol.8, 199-206, 2005.
- 3) 望月他: H.14年度土木学会中部支部研究発表会, 1994.
- 4) 名木野他: BF-spline Ritz法を用いた長方形Mindlin板の振動解析, 応用力学論文集, Vol.9, 341-352, 2006.

ここでは, 等分布荷重を受ける扇形厚板の曲げ解析を示す. ただし, $\nu =$

表 - 1 扇形 Mindlin 板のたわみと断面力の精度比較: $R_0/R_i = 2.0$, $\varphi = 60^\circ$, $B/h = 10$, $k = 1$

境界条件	$m_\theta = m_r$	$(\xi = \eta = 0.5)$			$(\xi = 0.5, \eta = 0)$		$(\xi = 0.5, \eta = 1)$	
		W	M_θ	M_r	M_θ	S_r	M_θ	S_r
SS-CC	15	0.0028955	0.018266	0.041089	-0.096925	0.66034	-0.074770	-0.45692
	25	0.0028955	0.018266	0.041089	-0.096924	0.66035	-0.074770	-0.45691
	35	0.0028955	0.018266	0.041089	-0.096924	0.66035	-0.074770	-0.45691
	Exact ¹⁾	0.0028955	0.018266	0.041089	-0.096925	0.6603	-0.074770	-0.4569
	SCM ²⁾	0.002894	0.01826	0.04107	-	0.6599	-	-
	$m_\theta = m_r$	W	M_θ	M_r	M_θ	S_r	M_θ	S_r
SS-SS	15	0.0082998	0.048779	0.083715	-0.026480	0.53283	0.012656	-0.38428
	25	0.0082998	0.048779	0.083715	-0.026480	0.53282	0.012656	-0.38426
	35	0.0082998	0.048779	0.083715	-0.026480	0.53281	0.012656	-0.38426
	Exact ¹⁾	0.0082998	0.048779	0.083715	-	0.5328	-	-0.3843
	SCM ²⁾	0.008298	0.04877	0.08370	-	0.5327	-	-
	multipliers	qB^4/D	qB^2	qB^2	qB^2	qB	qB^2	qB
SS-FF	$m_\theta = m_r$	$(\xi = \eta = 1)$		$(\xi = \eta = 0.5)$		$(\xi = 0, \eta = 0.5)$		$(\xi = 0, \eta = 0)$
		W	M_θ	W	M_θ	M_r	S_θ	S_θ
	15	0.22310	0.33041	0.12828	0.35904	0.011044	0.73740	-1.8168
	25	0.22310	0.33045	0.12828	0.35904	0.011043	0.73739	-1.8169
	35	0.22310	0.33046	0.12828	0.35904	0.011043	0.73739	-1.8169
	Exact ¹⁾	0.22310	0.33046	0.12828	0.3590	0.011043	0.7363	-1.818
	SCM ²⁾	-	-	0.1283	0.3591	1.102	0.7364	-
	multipliers	qB^4/D	qB^2	qB^4/D	qB^2	qB^2	qB	qB

表 - 2 周辺固定された扇形 Mindlin 板のたわみと断面力の収束性に与える区分点の数の影響: $\varphi = 60^\circ$, $R_0/R_i = 2.0$

B/h	$m_\theta = m_r$	$(\xi = \eta = 0.5)$			$(\xi = 0.5, \eta = 0)$		$(\xi = 0.5, \eta = 1)$	
		W	M_θ	M_r	M_θ	S_r	M_θ	S_r
10	5	0.0025988	0.020336	0.037588	-0.086678	0.62679	-0.069596	-0.44655
	9	0.0026004	0.020383	0.037634	-0.086587	0.62587	-0.069718	-0.44656
	13	0.0026005	0.020381	0.037635	-0.086571	0.62583	-0.069731	-0.44654
	17	0.0026005	0.020381	0.037634	-0.086570	0.62585	-0.069735	-0.44654
	21	0.0026005	0.020381	0.037634	-0.086570	0.62586	-0.069736	-0.44654
	25	0.0026005	0.020381	0.037634	-0.086570	0.62586	-0.069736	-0.44654
	31	0.0026005	0.020381	0.037634	-0.086570	0.62586	-0.069736	-0.44654
	SEM ³⁾	0.0026005	0.020380	0.037634	-0.086515	0.62593	-0.069685	-0.44657
1000	5	0.0022538	0.019160	0.037230	-0.086215	2.76450	-0.069882	0.76236
	9	0.0022585	0.019451	0.037348	-0.088964	1.38020	-0.069492	-0.46052
	13	0.0022632	0.019800	0.037545	-0.089436	0.81263	-0.069961	-0.44026
	17	0.0022633	0.019800	0.037549	-0.089444	0.70053	-0.069915	-0.44981
	21	0.0022633	0.019798	0.037548	-0.089445	0.67149	-0.069919	-0.44952
	25	0.0022633	0.019798	0.037548	-0.089444	0.66452	-0.069918	-0.44924
	31	0.0022633	0.019798	0.037548	-0.089442	0.66183	-0.069918	-0.44935
	SEM ³⁾	0.0022633	0.019799	0.037548	-0.089402	0.94046	-0.069920	-0.44630
multipliers		qB^4/D	qB^2	qB^2	qB^2	qB	qB^2	qB

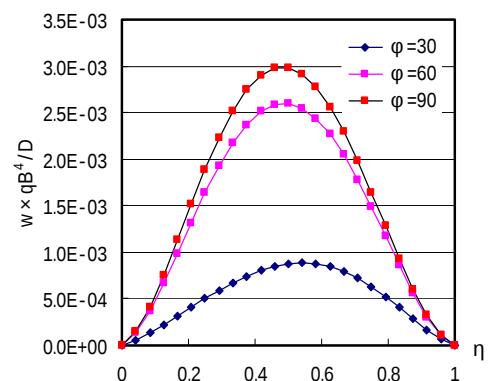


図-2 たわみの分布に与える中心角の影響: $\xi = 0.5$, $R_0/R_i = 2$, $B/h = 10$