

直方弾性体の固有値解析への BF-spline Ritz 法の適用について

大分工業高等専門学校 都市システム工学科 正 員 ○名木野 晴暢

大同工業大学 都市環境デザイン学科 正 員 水澤 富作

北海道大学大学院 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 フェロー 三上 隆

1. まえがき

エネルギー変分原理に基づく Ritz 法は、定式化が容易であり、計算負荷が小さい、という利点を有するため、偏微分方程式の境界値問題を近似的に解く一手法として、古くから幅広い分野で用いられている。Ritz 法による近似解は、採用する試行関数に大きく依存するが、一般には、幾何学的境界条件を満足した許容関数を仮定しなければならない。直方弾性体を取り扱った既往の研究報告では、べき級数^{1,2)}などの全体基底関数と境界関数を掛け合わせた許容関数を試行関数に採用する p-Ritz 法が主流である。一方、著者ら³⁾は、初めて局所的な基底で表される B-spline 関数と境界関数を組み合わせた区分的な許容関数の定式化を試みており、この許容関数を試行関数に採用した Ritz 法である BF-spline Ritz 法 (Boundary Function-spline based Ritz method) を提案し、これを 3 元連立偏微分方程式の固有値問題である Mindlin 平板の自由振動解析へ適用し、本手法の適用の可能性について明らかにした。

さて、p-Ritz 法による 3 次元弾性論に基づく直方弾性体の自由振動解析では、各振幅変位が 1 変数関数の 3 重積で表されるため、多項式の次数を高めることにより計算規模が拡大し、また、係数行列が悪条件になるなどの数値計算上の問題が生じる可能性がある。

本論文では、3 次元弾性論に基づく直方弾性体の固有値解析への BF-spline Ritz 法の適用の可能性について検討することを目的としている。

2. BF-spline Ritz 法による固有値問題の定式化

幾何学的境界条件を自動的に満足する全体基底で表される境界関数と局所基底で表される正規化された B-spline 関数を組み合わせた局所的な許容関数を試行関数に採用した Ritz 法である BF-spline Ritz 法を用いて、直方弾性体の固有値問題を定式化する。図-1 に

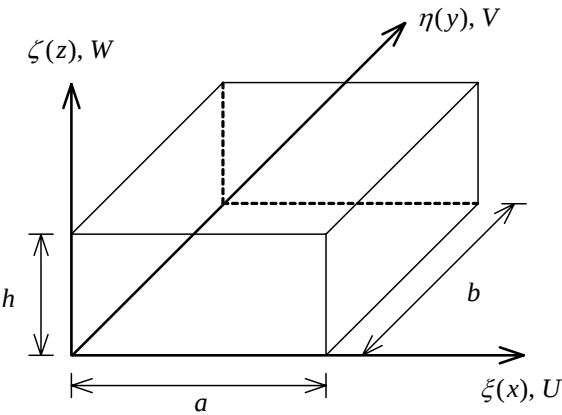


図-1 直方弾性体、座標系および振幅変位の定義

表-1 種々の幾何学的境界条件に対応した境界関数³⁾

B. C.	$\xi = 0, 1$			$\eta = 0, 1$		
	$F_u(\xi)$	$F_v(\xi)$	$F_w(\xi)$	$G_v(\eta)$	$G_w(\eta)$	
S-S	1	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	1	$4(\eta - \eta^2)$
C-C	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	$4(\eta - \eta^2)$
C-F	ξ	ξ	ξ	η	η	η
F-C	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \eta$	$1 - \eta$	$1 - \eta$
F-F	1	1	1	1	1	1

示すような直方弾性体は、等質、等方性かつ微小変形である 3 次元弾性論に従うものとし、その運動は調和振動すると仮定する。定式化にあたり、次式で表される無次元座標系を導入する。

$$\xi(x) = x/a, \eta(y) = y/b, \zeta(z) = z/h \tag{1}$$

弾性体の振幅変位 U, V, W は、表-1 に示すような境界関数³⁾ $F_\beta(\Delta), G_\beta(\Delta)$; ($\beta = u, v, w; \Delta = \xi, \eta$) と正規化された B-spline 関数を掛け合わせた区分的な許容関数を仮定する。ただし、 ζ 方向の相対する 2 面は、常に自由面とするので、境界関数の表記は省略してある。

$$U = F_u(\xi)G_u(\eta)\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{n=1}^{i_\eta}\sum_{r=1}^{i_\zeta}A_{mnr}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{n,k_\eta}(\eta)N_{r,k_\zeta}(\zeta);$$
$$V = F_v(\xi)G_v(\eta)\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{n=1}^{i_\eta}\sum_{r=1}^{i_\zeta}B_{mnr}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{n,k_\eta}(\eta)N_{r,k_\zeta}(\zeta);$$
$$W = F_w(\xi)G_w(\eta)\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{n=1}^{i_\eta}\sum_{r=1}^{i_\zeta}C_{mnr}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{n,k_\eta}(\eta)N_{r,k_\zeta}(\zeta).$$

(2)

キーワード BF-spline Ritz 法, 直方弾性体, 固有値解析, 3 次元弾性論, 境界関数

連絡先 〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地 国立大分工業高等専門学校 TEL: 097-552-7691

表-2 立方弾性体の振動数パラメータ Ω に与える spline 次数と区分点の数の影響: $h/a = 1, b/a = 1$

$(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1) \times (k_\zeta - 1)$	$m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta$	Modes					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
$2 \times 2 \times 2$	$5 \times 5 \times 5$	0.6701	0.6701	0.9106	1.598	1.770	1.770
	$7 \times 7 \times 7$	0.6689	0.6689	0.9088	1.597	1.768	1.768
	$9 \times 9 \times 9$	0.6684	0.6684	0.9083	1.597	1.767	1.767
	$11 \times 11 \times 11$	0.6681	0.6681	0.9081	1.596	1.767	1.767
	$13 \times 13 \times 13$	0.6680	0.6680	0.9080	1.596	1.767	1.767
$3 \times 3 \times 3$	$5 \times 5 \times 5$	0.6687	0.6687	0.9085	1.597	1.767	1.767
	$7 \times 7 \times 7$	0.6681	0.6681	0.9081	1.596	1.767	1.767
	$9 \times 9 \times 9$	0.6679	0.6679	0.9079	1.596	1.767	1.767
	$11 \times 11 \times 11$	0.6678	0.6678	0.9079	1.596	1.767	1.767
	$13 \times 13 \times 13$	0.6677	0.6677	0.9078	1.596	1.767	1.767
$4 \times 4 \times 4$	$5 \times 5 \times 5$	0.6682	0.6682	0.9081	1.596	1.767	1.767
	$7 \times 7 \times 7$	0.6679	0.6679	0.9079	1.596	1.767	1.767
	$9 \times 9 \times 9$	0.6677	0.6677	0.9079	1.596	1.767	1.767
	$11 \times 11 \times 11$	0.6676	0.6676	0.9078	1.596	1.767	1.767
Leissa and Zhang ¹⁾		0.6709	0.6709	0.9093	1.600	1.770	1.770
Lim ²⁾		0.6680	0.6688	0.9082	1.597	1.767	1.767

ここで, $A_{mnr}, B_{mnr}, C_{mnr}$ は未定係数, $i_\xi = m_\xi + k_\xi - 2, i_\eta = m_\eta + k_\eta - 2$ および $i_\zeta = m_\zeta + k_\zeta - 2$ である. ただし, m_ξ, m_η, m_ζ および k_ξ, k_η, k_ζ は, それぞれ ξ, η および ζ 方向に設けた区分点の数および spline 階数である.

直方弾性体の全ポテンシャルエネルギー Π は, 次式で与えられる.

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max} \quad (3)$$

ここで, $U_{\max}$ は弾性体の最大ひずみエネルギーであり, $T_{\max}$ は最大運動エネルギーである.

したがって, 式(2)を式(3)に代入し, この Π を未定係数で極値化すれば, 次式の代数方程式が得られる.

$$([K] - \Omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (4)$$

ここで, $\Omega = \omega a (\rho/E)^{1/2}$ は振動数パラメータである.

3. 数値計算例および考察

ここでは, 3次元弾性論に基づく直方弾性体の固有値解析への BF-spline Ritz 法の適用の可能性について検討するために, 本解析法の解の収束性と精度比較について示す. なお, 数値計算例では, 検討例の少ない片持弾性体を取り扱い, ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いる.

表-2 には, 立方弾性体 (厚肉比 $h/a = 1$, 辺長比 $b/a = 1$) の基本振動から 6 次の振動数パラメータ Ω の収束性に与える spline 次数 $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1) \times (k_\zeta - 1)$ と区分点の $m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta$ の影響と精度比較が示してある. ここで, spline 次数は $2 \times 2 \times 2$ から $4 \times 4 \times 4$ まで変化させ, 区分点の数は単調に $5 \times 5 \times 5$ から $13 \times 13 \times 13$ まで変化させている. また, 解の比較のために, Leissa・Zhang¹⁾ と Lim²⁾ の Ritz 法による数値解も示し

てある. これより, 基本振動から 6 次の振動数パラメータ Ω の値は, spline 次数に関わらず, 区分点の数の増大にともない, 一定値への安定した収束状態が示されており, また, spline 次数を 3 以上に設定すれば, 解の収束が早まり, $m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta = 7 \times 7 \times 7$ と比較的粗い区分点の数で, 解のほぼ収束した値が得られ, その収束値は, 他の数値解^{1,2)} と比較してやや小さめの値で良く一致しており, 精度の良い上界の結果が得られていると判断できよう.

4. まとめ

本論文では, 直方弾性体の固有値解析への BF-spline Ritz 法の適用の可能性について検討を行なった. 本解析法の収束状態は極めて良好であり, 解は精度の良い上界の値が得られるため, 本解析法は, 直方弾性体の固有値解析に十分適用可能であると判断できる. 今後, 固有振動モード (振幅変位モードや応力モード) の解析精度についても検討し, さらに, 3次元弾性論に基づく平板, 角柱や円筒体の自由振動解析への適用について検討して行く予定である.

参考文献

- 1) Leissa and Zhang: *Journal of the Acoustical Society of America* **73**, pp.2013-2021, 1983.
- 2) Lim: *Journal of the Acoustical Society of America* **106**, pp.3375-3381, 1999.
- 3) 名木野晴暢, 水澤富作, 三上隆: 応用力学論文集, Vol.9, pp.341-352, 2006.