

種々の境界条件を有する薄板の Fourier 解析および EFGM 解析

足利工業大学大学院 学生会員 ○鈴木 崇司
足利工業大学 正会員 末武 義崇

1. まえがき

薄板の曲げ解析に対し、周辺の境界条件が大きな影響を及ぼすことは良く知られている。また、境界条件によっては、解析が必ずしも容易ではないことも知られている。ある種の境界条件の下では、Timoshenko の著書¹⁾に述べられている Fourier 解析の結果と数値解析結果とが、必ずしも一致しないことが指摘されている。

そこで本研究では、全面等分布荷重が作用する矩形平板を解析対象とし、Fourier 解析的手法と数値解析的手法の両者を用いて薄板の曲げ解析を実施し、両者の比較検討を試みた。解析結果の比較にあたっては、種々の境界条件の下で近似解にどのような変化が生ずるか、定量的な検討を行った。数値解析的手法の一例として、本研究では Lagrange 多項式を用いたエレメントフリー法(EFGM)³⁾を採用した。

2. 任意境界条件に対応した Fourier 解析

本研究では、任意の組み合わせの境界条件に対応し得るように、たわみの基礎微分方程式の一般解として次式を導入する²⁾。

$$\begin{aligned} w(x, y) = & A_{0,1} + A_{0,2}x + A_{0,3}y + A_{0,4}x^2 + A_{0,5}y^2 \\ & + A_{0,6}x^3 + A_{0,7}y^3 + A_{0,8}(x^4 - y^4) + \frac{p_0}{48D}(x^4 + y^4) \\ & + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \left\{ (A_{m,1} + A_{m,2}y) \cosh \lambda_m y \right. \\ & + (A_{m,3} + A_{m,4}y) \sinh \lambda_m y \left. \right\} \exp(i\lambda_m x) \\ & + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left\{ (A_{n,5} + A_{n,6}x) \cosh \mu_n x \right. \\ & + (A_{n,7} + A_{n,8}x) \sinh \mu_n x \left. \right\} \exp(i\mu_n y) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 w は板中央面のたわみ、 p_0 は平板に作用する横荷重、 D は板の曲げ剛性、 i は虚数単位である。また、 $\lambda_m = m\pi/a$ および $\mu_n = n\pi/b$ とした。荷重については、解析を簡略化するために、全面等分布荷重を想定している。

式(1)は、 $8(M+N+1)$ 個の任意定数を含んでいる。

一方、境界条件を適用する際に、境界上の変数、すなわち x あるいは y のべき乗および双曲線関数を Fourier 級数展開して和の順序を交換すれば、適用する境界条件の組み合わせに関わらず、 $8(M+N+1)$ 個の決定方程式が得られる。結果的に、未知量の個数と条件式の個数とを一致させることができ、任意定数を決定することができる。

3. EFGM による薄板の解析

薄板の曲げに関する全ポテンシャルエネルギーは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right\} dx dy \\ & - \int_0^b \int_0^a p(x, y) w dx dy \\ & + \sum_{k=1}^4 \alpha_k \int_{C_k} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \text{ or } \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} ds \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 ν は Poisson 比、 α_k はペナルティー係数である。

本研究で用いた EFGM³⁾ は、Lagrange 多項式を用いて変位関数を仮定し、汎関数を離散化している。従って、節点のたわみを直接的な未知量として用いることが可能となるために、境界上のたわみをゼロとする基本境界条件については、入力データで処理することができる。一方、たわみ以外の境界条件についてはペナルティー法を用いて評価している。式(2)で例示したペナルティー部は、周辺固定条件の適用に対応している。

4. 解析モデル

本研究では、図-1 に示すような、全面等分布荷重 p_0 が作用する矩形平板を解析対象とし、Poisson 比 $\nu=0.3$ として数値計算を行った。適用した境界条件

キーワード：薄板、境界条件、Fourier 級数、数値解析、EFGM.

〒326-8558 栃木県足利市大前町 268-1 足利工業大学 Tel: 0284-62-0609 (423) E-mail: g06404st@mail.ashitech.ac.jp

は、単純支持と固定支持との組み合わせで表わされるものを選択した。なお、周辺単純支持板および周辺固定支持板の Fourier 解析に際しては、級数の項数を一方向(x あるいは y)に 100 項とし、その他の境界条件については、級数の項数を一方向に 20 項として解析を行った。また、EFGM 解析の際に用いたパラメータは、影響半径を 0.8, Gauss 積分次数を 8, セル総数を $5 \times 5 = 25$ とした。板の縦横比については 1.0~2.0 の範囲で変化させた。

5. 解析結果

今回の解析では、Fourier 解析および EFGM 解析により、板中央点のたわみを算出した。両者の比較にあたっては、Fourier 解析の結果を基準とし、EFGM 解析の絶対誤差を算定した。

解析結果を図-2 および図-3 に示す。各図とも、縦軸に解析誤差、横軸に縦横比 b/a をとって表示した。図-2 は、周辺単純支持および周辺固定支持を適用した場合の解析結果、図-3 は、それ以外の組み合わせによる境界条件を適用した場合の結果である。

図-2 および図-3 に示した結果を見ると、Fourier 解析と EFGM 解析の結果には、若干の差異が認められる。しかしながら、両者の解析誤差は境界条件の相違に依らず、最大でも 1% 未満と極めて小さい。従って、今回適用した境界条件については、Fourier 解析と EFGM 解析との間には顕著な差異は認められない。

境界条件の組み合わせと、縦横比の変化に着目すると、周辺固定支持、3 辺固定・1 辺単純支持および隣接 2 辺固定・他辺単純支持のように、少なくとも 1 組の隣接 2 辺が固定支持されている場合、縦横比の増加に伴い誤差が滑らかに減少する傾向が見られる。一方、一組の相対 2 辺が単純支持されている場合は、縦横比の変化による誤差の変動が少ないものの、周辺単純支持されている場合は誤差の変動が大きく、一定の傾向は認められない。

6. 結論

本研究では、全面等分布荷重を受ける矩形平板を対象とし、種々の境界条件の下、Fourier 解析および EFGM 解析を行った。また、両者の解析結果の比較を通じ、境界条件が薄板の曲げ解析に及ぼす影響を調べた。

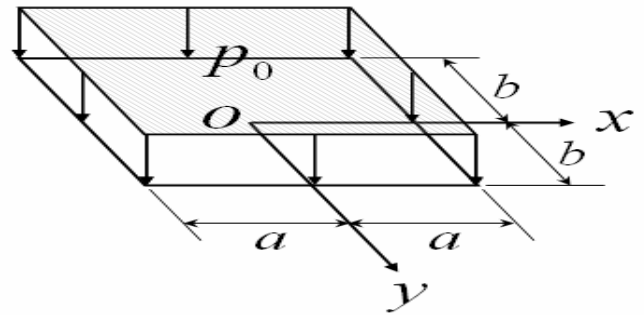


図-1 全面等分布荷重を受ける矩形平板

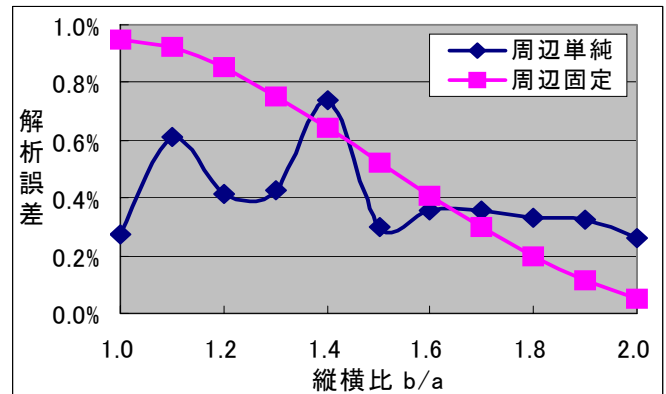


図-2 中央点のたわみに関する解析誤差
(周辺の境界条件が同一の場合)

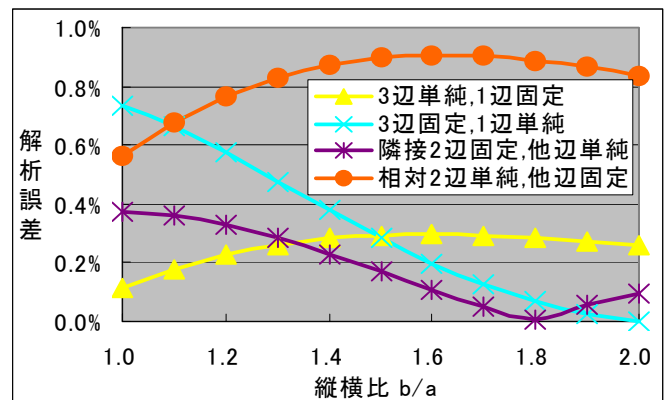


図-3 中央点のたわみに関する解析誤差
(周辺の境界条件が同一でない場合)

解析結果の比較から、単純支持および固定支持の組合せによる境界条件については、2つの解析結果の差異は極めて小さく、Fourier 解析および数値解析に及ぼす決定的な影響は認められないことが明らかになった。

今後は、自由辺を有する境界条件に関する検討や、曲げモーメントおよびせん断力に関する境界条件の影響についても定量的な検討を実施する予定である。

参考文献

- 1) S.P.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger (長谷川節訳): 板とシェルの理論, プレイン図書出版, 1994.
- 2) Y.Suetake, M.Hirashima: J. of Eng. Mech., Vol.123, No.4, Apr., pp.293-301, 1997.
- 3) Y.Suetake: J. of Eng. Mech., Vol.128, No.2, Feb., pp.231-239, 2002.