

写像による M 積分の近似法の提案と X-FEM を用いた屈折き裂及び曲線き裂の解析

京都大学大学院 学生会員 ○柴沼 一樹
 京都大学大学院 正会員 宇都宮 智昭

1. はじめに

拡張有限要素法 (X-FEM) の特徴は、従来の有限要素法 (FEM) と異なり、き裂を要素と独立に定義することが可能であり、二次元問題の場合き裂を「線」でモデル化できることである。このため、(1)複雑な形状のき裂でも容易にき裂形状をモデル化可能であり、特にき裂の進展解析には有効となる。(2)比較的粗く単純な要素分割で高精度なき裂の解析が可能である。X-FEMに関して多くの研究が行われているが、それらのほとんどは直線き裂に関するものであり、屈折き裂及び曲線き裂に関する研究は少なく十分な検証や議論が行われていない。この原因として、X-FEM及びその最も一般的な応力拡大係数 (K 値) の評価法である M 積分法が直線き裂を仮定しているため、それらをそのまま用いて屈折き裂や曲線き裂の精度検証を行った場合、直線き裂と同程度の精度が期待できないためであると考えられる。しかし、き裂の進展過程を考えた際、初期欠陥が直線き裂であった場合でも、それらに負荷されるのは一般的に混合破壊モードであり、進展過程の初めにおいて屈折を伴い、その後曲線き裂として成長していくと考えられることから、屈折き裂や曲線き裂に対する精度の検証はX-FEMの汎用性を評価する上で重要な課題である。任意形状のき裂を M 積分法により評価する際に、X-FEMの特長を生かして比較的粗い要素を用いても高い解析精度を維持するためには、比較的大きな積分経路半径でも精度の高い解析が要求される。このため、任意き裂の代表的な屈折き裂や曲線き裂解析における M 積分の経路独立性に関する評価が重要な課題となる。そこで本研究では、写像による M 積分の近似法の提案を行い、この提案を屈折き裂及び曲線き裂を含む解析モデルに適用し、 M 積分の屈折き裂及び曲線き裂に関する経路独立性について考察することにより、X-FEMの屈折き裂及び曲線き裂への適用性について総合的な検証を行う。

2. X-FEM

X-FEM では要素内の変位場を次の近似式で表す。

$$\mathbf{u}^e = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{i \in C} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i^k + \sum_{i \in J} \phi_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_i$$

ここで ϕ_i は通常の要素の定式化で用いられる内挿関数、 m は要素節点数、 C はき裂先端近傍の特異性を考慮する節点の集合、 J は C 以外でき裂の不連続面を考慮する節点の集合であり、それぞれの節点属性を C 属性、 J 属性と呼ぶ。 $\mathbf{u}_i$ 、 $\mathbf{c}_i^k$ 、 $\mathbf{b}_i$ は節点自由度である。 $\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k=1, \dots, 4$) はき裂先端近傍の特異場を表す関数、 $H(\mathbf{x})$ はき裂の不連続性を表す関数である。本研究の対象は単純な直線き裂ではなく屈折・曲線き裂を含む解析モデルであり、これらは要素内でのき裂と積分領域のモデル化が複雑となり扱いが困難である。このため、本研究におけるき裂の解析モデルは、前報で提案した手法を用いて1つの矩形要素あたりに1つの直線き裂辺で屈折き裂と曲線き裂をモデル化し、X-FEMによるき裂の解析を行った。

3. M 積分法の補助問題の変位と応力の写像変換

従来の研究では、図-1に示される M 積分領域上の任意の点 P_M における、 M 積分法の単独破壊モードIあるいはIIを提供する補助問題の変位と応力の近似値は、点 P_M のき裂先端を中心とした極座標系 (r_M, θ_M) により表わされ、直線き裂を仮定している。また、X-FEMは比較的粗い要素により高精度なき裂の解析が可能であるが、そのような要素を用いると積分経路を大きくとる必要がある。ここで、解析対象が屈折き裂や曲線き裂である場合、積分領域の

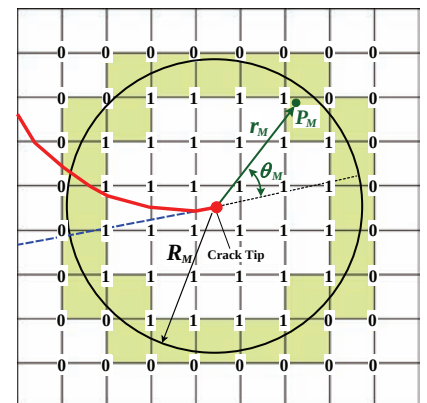


図-1 M 積分領域とその内部の点 P_M

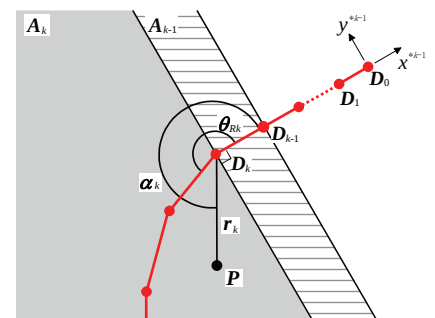


図-2 STEP k における変換前の点 P 及びき裂点の座標位置

任意の点 P_M における補助問題の変位及び応力の値として、直線き裂を仮定した従来の値を用いた場合には、その解析精度に問題が生じる。しかし任意形状のき裂において M 積分法の補助問題に適用可能な理想的な単独破壊モードIまたはIIにおける変位と応力の値を直接算出することは困難である。そこで本研究では、直線き裂以外の任意のき裂に適用可能な M 積分法の補助問題の近似解を算出する手法を提案する。具体的には、 M 積分領域上の任意の点 P_M における単独破壊モードの変位と応力の値を、図-2に示されるような任意形状き裂から直線き裂への写像変換を用いた繰り返し計算により求める。すなわち、き裂の形状を考慮した点 P_M の座標 r_M 及び θ_M の値を求め、 M 積分法の補助問題における変位と応力の近似値を算出する。また、 C 節点に付加される内挿関数 $\chi_k(\mathbf{x})$ ($k=1, \dots, 4$)も直線き裂を仮定しており、前報によって C 領域内の点 P_C の座標に対する写像変換の有効性が示された。任意形状のき裂は曲折線でモデル化されることから、1線分ごとに写像変換することにより仮想的な直線き裂に変換することができる。このため、独立に定義された C 領域の内挿関数の写像変換と M 積分の変位と応力の写像変換は同時に扱うことが可能となる。この写像変換を半径 R_C 内の領域として定義した C 領域上の任意の点 P_C に適用した場合、 C 節点に付加された内挿関数 $\chi_k(\mathbf{x})$ ($k=1, \dots, 4$)と J 節点に付加された内挿関数 $H(\mathbf{x})$ のき裂の不連続面は一致することとなり、要素内のき裂を考慮した変位場を正確に近似表現することができる。同様に半径 R_M 内の M 積分経路として定義した M 積分領域上の任意の点 P_M に適用した場合、 M 積分法の補助問題に関する変位と応力のより厳密な近似値を与えることが可能となり、X-FEMによる任意形状のき裂に対する応力拡大係数の解析の精度向上が期待できる。

4. 解析検証

上記の提案を屈折き裂及び曲線き裂を含む解析モデルに適用し、 M 積分の屈折き裂及び曲線き裂に関する経路独立性について検証を行った。解析モデルとして、屈折き裂の代表的なモデルである2線分による内部屈折き裂（主き裂長さ $a=26.5\text{mm}$ 、き裂長さ比 $b/a=0.2$ 、屈折角度 $\theta=30^\circ$ ）及び曲線き裂の代表的なモデルである内部円弧き裂（き裂先端距離 $2a=25.0\text{mm}$ 、円弧中心角度 $2\beta=40^\circ$ ）を有する帯板の引張試験（ともにモデル幅 $W=250\text{mm}$ 、基本メッシュ幅 $h=1\text{mm}$ ）を行った。図-3及び図-4にそれぞれのモデルについて、両モデルで無限板に対する理論解への収束性が確認された M 積分経路半径 $R_M=2.0h$ の場合によって正規化された K 値の解析結果を示す。屈折き裂及び曲線き裂に対し、 K_I について写像適用前は R_M が大きくなるにつれ誤差が増大し、 $R_M=14h$ でそれぞれ誤差7.3%及び2.5%となった。一方、写像適用後は全ての R_M に対しそれぞれ誤差0.5%以下及び0.6%以下となり、精度及び経路独立性の両方について大幅に改善された。 K_{II} に関しては写像適用の有無に関わらず R_M が大きくなるにつれ誤差が増大したが、それぞれのモデルで $R_M=14h$ で写像適用前は誤差22.9%及び25.8%、適用後は9.1%及び5.8%となり、 K_I ほど顕著ではないが写像変換により効果的に改善された。

5. 結論

本研究では、従来のX-FEMに関する研究では十分に議論されていない屈折き裂及び曲線き裂に関する M 積分の経路独立性について、上記で説明した以外の解析結果を含めて総合的な検証を行い、以下の結論を得た。(1)写像を用いた M 積分法におけるき裂形状を考慮した補助問題の近似値を算出する手法の提案を行った。(2) M 積分法の補助問題において、新たに提案した写像によるき裂の形状を考慮した変位と応力の近似値の算出方法を屈折き裂及び曲線き裂モデルに適用し検証を行った結果、従来の M 積分をそのまま用いた場合に比べて K 値の精度及び経路独立性について大幅な改善が見られ、その有効性が示された。

(参考文献)

- 1) 柴沼一樹, 宇都宮智昭: X-FEMを用いた曲線き裂のモデル化とき裂進展シミュレーションへの適用, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.1, pp.108-121, 2007.

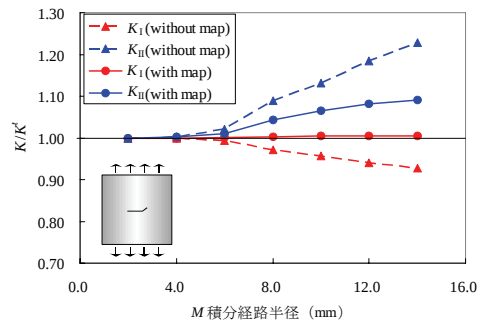


図-3 屈折き裂における積分経路に対する写像の有無による K 値の検証結果

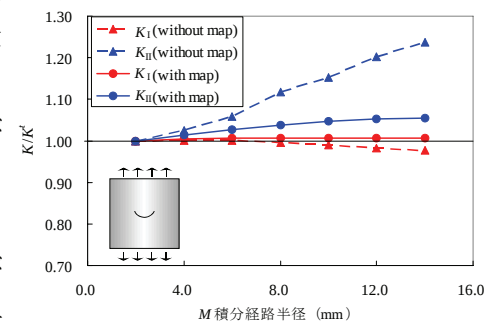


図-4 曲線き裂における積分経路に対する写像の有無による K 値の検証結果