

各種変位係数関数を用いたはりの一般化高次有限要素法の精度特性

福島工業高等専門学校 正会員 根岸 嘉和

1. 緒言

本報告は、はり曲げの有限要素解析の精密化と一般化高次はり理論¹⁾の有用性の拡大を目指す試みの一環として、2次元はりの曲げ解析に関して、これまで各種の多項式を変位係数関数として用いて開発した一般化高次有限要素法²⁾(はりの変位成分を高さ方向座標のべき級数で仮定すると同時に軸方向にも順次高次の変位分布を仮定したもの)の精度特性について総括すると共に、新たに変位係数関数として、順次高次化する三角級数を用いた有限要素を開発し、精度を検証する。

2. 多項式を変位係数関数に用いた各種一般化高次有限要素法

1) 精度特性 これまで、各種の多項式を変位係数関数として用いた高次要素を開発し、図-1に示すような、等分布荷重を載荷したはりをはじめとした厳密解³⁾のある各種問題を解析し、精度検証を行った結果、以下のような精度特性を確認した。

各要素は変位の高さ方向の分布次数 n と軸方向の分布次数 m が各々同じ場合は、変位係数関数の微係数の連続回数 k の値に関わらず同じ収束解を与える。

但し、 k の高階化に伴い解析自由度が減少し効率的な解析が可能となる。

各要素による収束解の精度は、 n および m の高次化に伴い向上する。この精度向上には、ティームでは n の高次化が支配的であり、スラームでは、 m の高次化が支配的である。

各成分の精度は $u_z, u_x > \sigma_{xx} > \sigma_{zz} > \sigma_{xz}$ の順に高く、つり合い法による σ_{zz}, σ_{xz} の補正は、 σ_{zz} にはほぼ効果的だが、 σ_{xz} には効果が薄く精度悪化の場合もある。

Greimann-Lynn の仮定のはり要素への適用(要素内せん断歪一定となる変位の従属性を導入し、自由度を上げずにスラームでのせん断変形理論要素の精度低下の回避を目指した要素)は、 $n=1$ で $m=1$ or 2 の低次要素でのスラームの解析で有効。

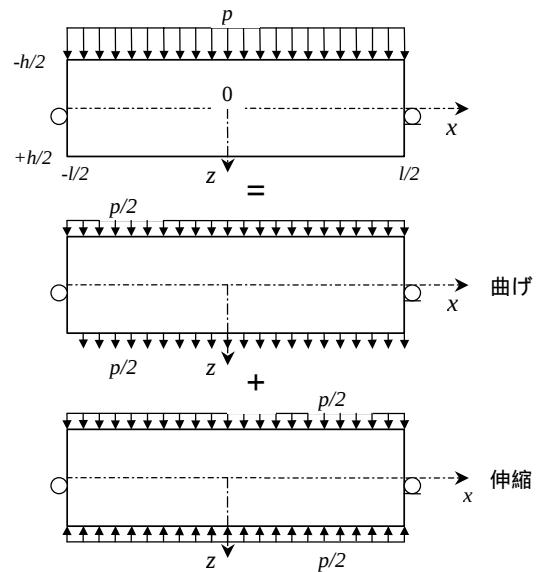
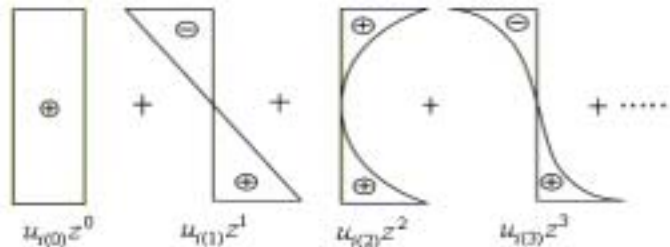


図-1 座標系と梁の曲げ挙動・伸縮挙動



曲げ $u_z : n=0,2,4,\sim$ $u_x : n=1,3,5,\sim$

伸縮 $u_z : n=1,3,5,\sim$ $u_x : n=0,2,4,\sim$

図-2 変位係数 $u_i(n)$ の高さ方向分布

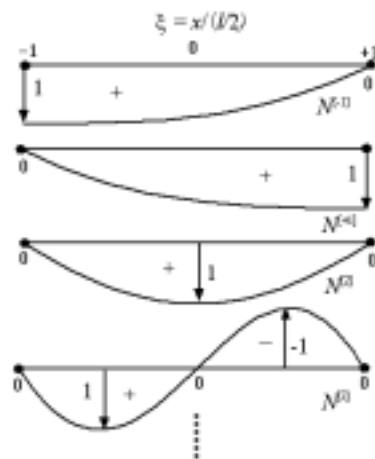


図-3 変位関数 $N^{[m]}(\xi); \xi = x/(l/2)$ の軸方向分布

2) 要素特性 一般化高次理論に基づく本要素は、各次数の成分の寄与が個別に把握でき、はりの形状比や荷重の変動幅等によって変わる高次成分の影響を細分化して解析できる点で優れている。また、古典理論の仮定に近い単純な系から厳密解の複雑な挙動に至るまでの各段階のはりの力学挙動を、適切な理論次数の要素を用いて効率よく精密に解析できる利点を有している。

キーワード：有限要素法 一般化高次理論 はり曲げ 三角級数

〒970-8034 福島県いわき市平上荒川字長尾 30 福島工業高等専門学校 建設環境工学科 Tel 0246-46-0831

3. 三角級数を用いた高次有限要素法の構築

1) 三角級数のみの変位係数関数の要素

はり要素の変位成分 u_i ($i=x, z$) を次式で仮定する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n u_{i(n)}(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n \sum_{m=1}^M u_{i(n)}^{[m]} N^{[m]}(\xi) \quad (1)$$

すなわち、高さ方向に図-2のように z のべき級数 z^n で展開仮定すると同時に、長さ方向には図-3 の変位係数関数 $N^{[m]}(\xi)$; $\xi = x/(l/2)$ を採用し、これらと変位係数 $u_{i(n)}^{[m]}$ との積の重ね合わせで表す。

上式における $N^{[m]}(\xi)$ は、要素両端の2節点でそれぞれ1-0、0-1となる正弦分布 ($m = -1, +1$) に、両節点で0になる無節点高次正弦分布を順次 ($m = 2, 3, 4 \sim$) 採用し、次式で与える。

$$N^{[\pm 1]} = \sin \frac{\pi}{4} (1 \pm \xi)$$

$$N^{[m]} = \sin \frac{(m-1)\pi}{2} (1 - \xi) ; m = 2, 4, 6, \dots \quad (2)$$

$$N^{[m]} = \sin \frac{(m-1)\pi}{2} \xi ; m = 3, 5, 7, \dots$$

式(1)をマトリックス表示すると次式ようになる。

$$\{u\} = [N] \{\delta\} \quad (3)$$

$\{\delta\}$ は $u_{i(n)}^{[m]}$ を成分とする変位係数ベクトルであり、これを用いて幾何学的関係式より歪ベクトル $\{\varepsilon\}$ を求め、構成関係式より応力ベクトル $\{\sigma\}$ を求めて、仮想仕事の原理に基づいて次式の剛性方程式を得る。

$$\{f\} = [k] \{\delta\} \quad (4)$$

2) 補償関数を挿入した変位係数関数の要素

式(2)の低次2成分項の正弦分布 ($m = -1, +1$) の代わりに、同じく節点でそれぞれ1-0、0-1となる次式の直線分布を採用した要素も開発した。

$$N^{[\pm 1]} = (1 \pm \xi) \quad (5)$$

3) 解析例と精度特性

図-1で厳密解(Exact³⁾)のある境界条件(端面がその面内に变形しない: 軸直角方向変位 $\equiv 0$ の単純支持)の単純はり ($\nu=0.3$) に等分布荷重 p が満載された場合を、本手法の3次理論要素 ($n=3$) に基づく各有限要素法で解き、精度の検証を行う。

図-4と図-6には、スラットビーム ($h/l=0.75$) のはり中央位置での鉛直変位 u_z と曲げ応力 σ_{xx} の高さ方向分布を示し、図-6には、スラットビーム ($h/l=0.01$) のはり中央位置での鉛直変位 u_z の高さ方向分布を示す。三角級数のみ (Tri $N-m/ne$ で N 次理論要素, m 次分布変位係数関数, ne 要素分割を表す)、補償関数考慮 (Com $n-m/ne$) とともにスラットビームでは2要素分割でも高精度な解を与えており、Triの要素細分化により精度悪化をきたす点がComでは改善されている。スラットビームでは、Triは2要素分割で厳密な解を与えているが要素細分化による精度悪化がはなはだしく、Comは要素細分化により徐々に厳密解に近づくが、精度的には不十分であると言え、ともにスラットビームの解析における問題点が指摘できる。

4. 結 言

各種多項式に基づく高次有限要素法は互いに同等の精度特性を示し、理論次数の高次化に伴い高精度な解を与えるが、三角級数に基づくものは問題点のさらなる改善が必要である。

参考文献

- 1) 平島健一・根岸嘉和：土木学会論文集, 350号/I-2, pp.351-354, 1984.
- 2) 根岸嘉和：第56回理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM 2007, 3B16, 2007.
- 3) Pagano, N.J.: Journal of Composite Materials, Vol.4, pp.20-34, 1974.

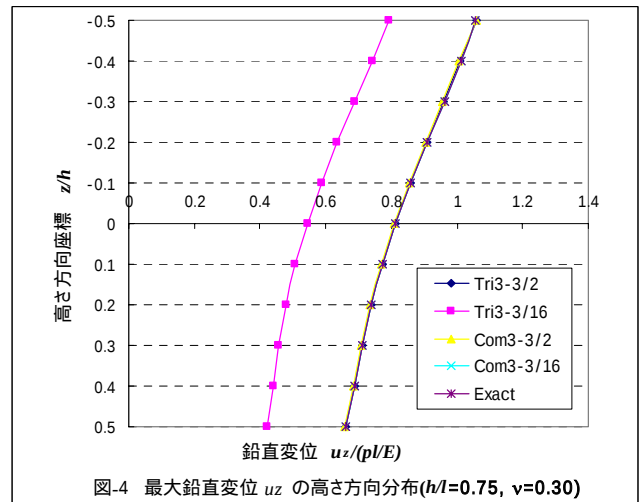


図-4 最大鉛直変位 u_z の高さ方向分布 ($h/l=0.75$, $\nu=0.30$)

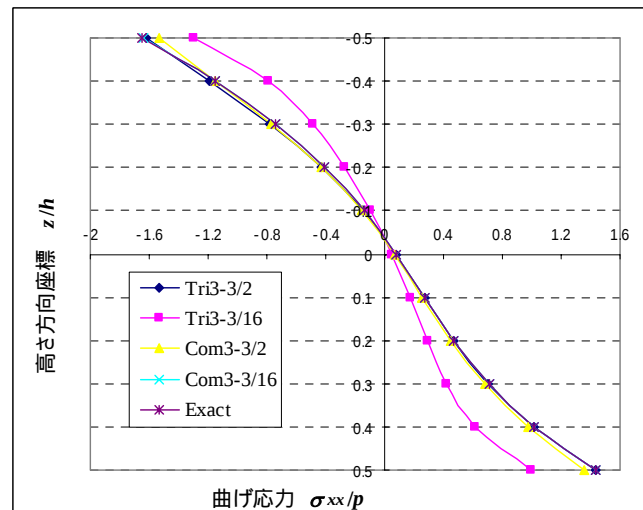


図-5 曲げ応力 σ_{xx} の高さ方向分布 ($h/l=0.75$, $\nu=0.3$)

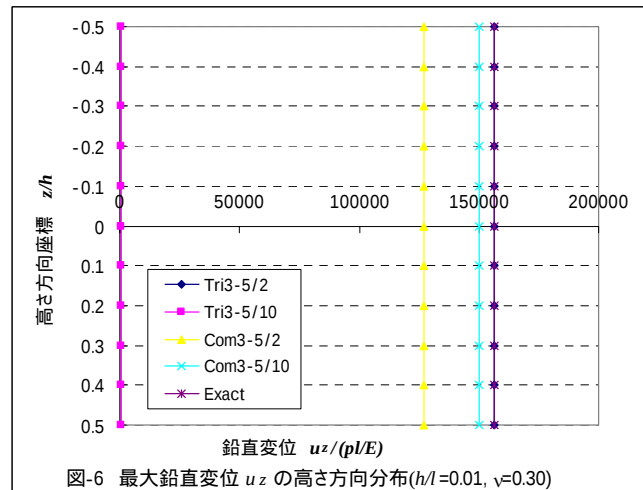


図-6 最大鉛直変位 u_z の高さ方向分布 ($h/l=0.01$, $\nu=0.30$)