

拡張カルマンフィルタを用いた安全性指標算定に関する基礎研究

武蔵工業大学 正会員 丸山 収

1. はじめに

構造安全性¹⁾を評価するために安全性指標が用いられている。安全性指標は性能関数 $g(\mathbf{x})$ が非線形関係式で与えられる場合には、普遍性を保つために $g(\mathbf{x})=0$ となる破壊点 $\mathbf{x}_0$ まわりで線形化された性能関数の平均値と標準偏差により求められる。本研究は拡張カルマンフィルタを用いて、与えられた性能関数の破壊点を求め、安全性指標を算出する手法について、基礎的な検討を行っている。

2. 安全性指標の算出

確率変数ベクトル $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ が正規分布に従い、互いに相関を有するものとする。そして平均値ベクトルを $\bar{\mathbf{x}}$ とすると共分散行列 $\mathbf{C}_x$ は、次式で与えられる。

$$\mathbf{C}_x = E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T] \quad (1)$$

次に、構造物が破壊または安全であるということを性能関数 $g(\mathbf{x})$ により記述し、安全性指標を算出することを考える。性能関数は、確率変数ベクトル $\mathbf{x}$ の関数であり以下のように定義する。

$$g(\mathbf{x}) > 0 \text{ 安全}, \quad g(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ 破壊} \quad (2)$$

破壊点 $\mathbf{x}_0^T = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ の近傍で性能関数を 1 次項までのテーラー展開により線形化し、 $g(\mathbf{x}_0) = 0$ であることを考慮すると次式を得る。

$$g(\mathbf{x}) \doteq (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{G}_0 \quad (3)$$

$$\text{ここで, } \mathbf{G}_0^T = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_0} = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right]_{\mathbf{x}_0}$$

式(3)より、性能関数 $g(\mathbf{x})$ の平均値と分散値を求める。

$$E[g(\mathbf{x})] = \bar{g}(\mathbf{x}) = (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{G}_0 \quad (4)$$

$$E[(g(\mathbf{x}) - \bar{g}(\mathbf{x}))^2] = \sigma_g^2 = \mathbf{G}_0^T \mathbf{C}_x \mathbf{G}_0 \quad (5)$$

式(4)と式(5)から、安全性指標 β は次式で求められる。

$$\beta = \frac{\bar{g}(\mathbf{x})}{\sigma_g} = \frac{(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{G}_0}{(\mathbf{G}_0^T \mathbf{C}_x \mathbf{G}_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

一般的には式(6)の破壊点 $\mathbf{x}_0$ および破壊点におけるヤコビアン行列 $\mathbf{G}_0$ が未知であるので、 $g(\mathbf{x}_0) = 0$ を満足する破壊点を探索しながら、式(6)を計算する。

3. 拡張カルマンフィルタによる破壊点の直接探索

式(6)より、性能関数 $g(\mathbf{x})$ に対する安全性指標が与えられることを示したが、その際破壊点 $\mathbf{x}_0$ および破壊点におけるヤコビアン行列 $\mathbf{G}_0$ が未知である。そのために、破壊点の探索を行いながら式(6)の収束計算を行うための各種アルゴリズムが提案されている。本研究では Shinozuka の研究²⁾を参考にして、拡張カルマンフィルタにより、破壊点 $\mathbf{x}_0$ とヤコビアン行列 $\mathbf{G}_0$ を求めることを行う。Shinozuka は、次式で与えられる評価関数の制約条件付最小化問題の最小値が、安全性指標 β と等価であるという解釈を示している。

$$\gamma(\mathbf{x}) = \left[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{最小} \quad (7)$$

制約条件 $g(\mathbf{x}) = 0$

式(7)で与えられる制約条件付最小化問題にラグランジェの未定定数法を用いる。

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \left[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right]^{\frac{1}{2}} + \lambda g(\mathbf{x}) \rightarrow \text{最小} \quad (8)$$

ここで、 λ はラグランジェの未定定数である。

式(8)の極小点において $\partial L / \partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\partial L / \partial \lambda = 0$ となることを用い、式(7)の最小値を与える $\mathbf{x}$ を破壊点 $\mathbf{x}_0$ とすると次式が得られる。

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \frac{(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{G}_0}{(\mathbf{G}_0^T \mathbf{C}_x \mathbf{G}_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

式(9)より $\beta = \gamma(\mathbf{x}_0)$ であり、式(6)で与えられる安全性指標と一致することが分る。

本研究では、式(7)を参考にして 2 次形式評価関数の制約条件付最小化問題を考える。

キーワード 構造信頼性, 安全性指標, 破壊確率, カルマンフィルタ

連絡先 〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1 武蔵工業大学工学部都市工学科 TEL03-3703-3111

$$\gamma'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \rightarrow \text{最小}$$

$$\text{制約条件 } g(\mathbf{x}) = 0 \quad (10)$$

式(10)は式(7)と比較すると以下の関係がある。

$$\gamma'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{x})^2 \quad (11)$$

式(10)は確率変数ベクトル $\mathbf{x}$ に関する2次形式で与えられることから、評価関数 $\gamma'(\mathbf{x})$ は、 $\mathbf{x}$ に関して2回微分可能である。同様に、式(10)の最小化問題にラグランジュの未定定数法を適用する。

$$L'(\mathbf{x}, \lambda') = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \lambda' g(\mathbf{x}) \quad (12)$$

式(12)を $\mathbf{x}$ と λ' で偏微分する。

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \lambda' \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda'} = g(\mathbf{x}) \quad (14)$$

式(12)の極小点では $\partial L'/\partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\partial L'/\partial \lambda' = 0$ となり、そのときの $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}'_0$ とすると、式(10)の最小値は次式となる。

$$\gamma'(\mathbf{x}'_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'_0)^T \mathbf{G}'_0}{(\mathbf{G}'_0^T \mathbf{C}_x \mathbf{G}'_0)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 \quad (15)$$

式(11)より、安全性指標が正の値ならば、式(7)と式(10)から求められる破壊点は同じになるので $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0$, $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}'_0$ として、安全性指標は次式で与えられる。

$$\beta = \sqrt{2\gamma'(\mathbf{x}_0)} \quad (16)$$

上記の議論をもとにして、拡張カルマンフィルタに破壊点を求めるための定式化を行う。状態方程式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{bmatrix}_i \quad (17)$$

一方観測方程式は、式(13)および式(14)より、定式化される。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \lambda \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ g(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

式(17)における添え字 i は、解が収れんするまでバッチ処理で拡張カルマンフィルタアルゴリズムの繰り返し計算を行うことを意味している。この定式化により破壊点

$\mathbf{x}_0$ と破壊点におけるヤコビアン行列 $\mathbf{G}_0$ が求まり、式(15)と式(16)から安全性指標 β を求めることが出来る。式(12)の最小化問題における破壊点をカルマンフィルタを援用して解いているということであるが、単純に状態方程式と観測方程式の定式化を行えば良いこと、性能関数 $g(\mathbf{x})$ が有限要素法などの汎用計算コードで与えられる場合にも、観測方程式の $\partial g(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ を影響係数法で評価することで、破壊点の探索が可能である。

4. 数値計算例

以下に示す最も基本的な性能関数について安全性指標の試算を行った。

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \quad (19), \quad g_2(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{x_2} - 1 \quad (20)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 1 - \frac{x_2}{x_1} \quad (21), \quad g_4(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{x_2^3} - \frac{1}{x_2^2} \quad (22)$$

なお、 $x_1 \sim N(10, 2)$, $x_2 \sim N(8, 2)$ のガウス性確率変数として、相関係数は $\rho = 0.0, 0.3, 0.6$ の3ケースを仮定した。

表-1 安全性指標の計算結果

性能関数	相関係数 ρ	安全性指標 β
$g_1(\mathbf{x})$	0	0.70717
	0.3	0.84515
	0.6	1.11803
$g_2(\mathbf{x})$	0	0.70711
	0.3	0.84515
	0.6	1.18034
$g_3(\mathbf{x})$	0	0.70711
	0.3	0.84515
	0.6	1.11803
$g_4(\mathbf{x})$	0	0.71327
	0.3	0.8462
	0.6	1.11558

表-1に計算結果を示した。式(19)から式(22)は基本的に同一の性能関数である。また性能関数 $g_1(\mathbf{x})$ は線形関係式であるので、得られる結果は理論解である。表-1に示した結果より精度良く計算が行われていることがわかる。

5. まとめ

今後の課題としては、確率変数が非正規性の場合、性能関数が陽に関数形として与えられない場合、さらに目標安全性指標を満足する部分安全係数の逆解析などを考えている。

参考文献 1)星谷勝・石井清：構造物の信頼性設計法，鹿島出版会 2)Shinozuka, M.: Basic Analysis of Structural Safety, ASCE, Vol.109, No.ST3, pp.721-740, 1983.