

格子ボルツマン法を用いた非圧縮性粘性流体解析の精度検証

中央大学大学院 学生員 楠 和也
中央大学 正会員 田中 聖三
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

近年, 数値流体力学の新しい手法として, 格子ボルツマン法^{1)~3)} (LBM: Lattice Boltzmann Method) が注目を集めている. この手法は, アルゴリズムが簡便なため計算が高速に処理可能であり, 粒子の計算を局所的に行う陽的解法なため大規模計算に適している等の利点を有している. 著者らは, これまで LBM に着目し, 非圧縮性粘性流体解析への適用を行ってきた⁴⁾. しかし, その精度についての検討は十分になされていなかった.

そこで本論文では, LBM による非圧縮性粘性流体解析における精度検証を目的とするものである. 数値解析例として Poiseuille 流れ問題及び角柱周り流れ問題を取り上げ, 本手法の有効性の検討を解析精度の観点から行うものとする.

2. 格子ボルツマン法

LBM は, 流体を有限個の速度を持つ仮想的な粒子の集合体としてとらえ, 各粒子の衝突と並進を微視的な流体粒子の分布関数を変数として用いて逐次計算し, その求められた粒子分布関数から速度や圧力の巨視的変数を求める計算手法である.

(1) 格子ボルツマン方程式

格子点上の粒子の運動は, 以下の格子ボルツマン方程式によって表される. なお, 衝突項には格子 BGK モデルを用いた.

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

この式により粒子の計算を局所的に行い, 陽的に未知量である粒子分布関数を求める. 左辺は粒子の並進過程を, 右辺は衝突過程を示している. 上式において, f_i は i 方向の粒子がどれくらい存在するかをいうことを表す粒子分布関数, Δt は微小時間増分を表す. また, \mathbf{c}_i は粒子の並進ベクトルを表している. なお, 等温場の格子気体モデルとしてはいくつか提案されているが, 本論文では 2 次元 9 速度モデルを用いる.

$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ は, 局所平衡分布関数であり, τ は単一時間緩和係数である. この衝突演算子 τ は, 一回の衝突において全格子点の粒子分布が, 常に同じように $\frac{1}{\tau}$ の割合で非平衡量が減少して, 局所的な平衡状態に向かって緩和するということを表し, 動粘性係数 ν を用いて以下のように表される.

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2} \quad (2)$$

(2) 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数は, ある空間内において平衡状態になった場合の粒子の分布を表す関数であり, 流体の密度と流速によって決定され, 以下の式で表される.

$$f_i^{eq} = E_i \rho \left[1 + 3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right] \quad (3)$$

上式において, ρ は流体の密度, \mathbf{u} は流体の巨視的速度を表している. また, 本論文で用いている 2 次元 9 速度モデルでは E_i の値を, 次のような値とする必要がある.

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{4}{9} \\ E_2 &= E_3 = E_4 = E_5 = \frac{1}{9} \\ E_6 &= E_7 = E_8 = E_9 = \frac{1}{36} \end{aligned} \quad (4)$$

(3) 流れの巨視的変数

流体の巨視的密度, 速度は, 格子ボルツマン方程式においての未知量である粒子分布関数を用い, 以下の式より算出される.

$$\text{密度;} \quad \rho = \sum_i^9 f_i \quad (5)$$

$$\text{速度;} \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i^9 \mathbf{c}_i f_i \quad (6)$$

$$\text{圧力;} \quad P = \frac{2}{D} \rho e \quad (7)$$

ここで, D は空間次元, e は内部エネルギーを表す. なお, 本報告では等温モデルを扱っているので $e = \frac{D}{6}$ となり, 圧力 P は, 次式によって算出される.

$$\text{圧力;} \quad P = \frac{\rho}{3} \quad (8)$$

3. 数値解析例

(1) Poiseuille 流れ問題

分割数が解析精度に与える影響について検討するため数値解析例として Poiseuille 流れ問題を取り上げた.

図 - 1 に解析モデルを示す. 図 - 1 のように流入部では x

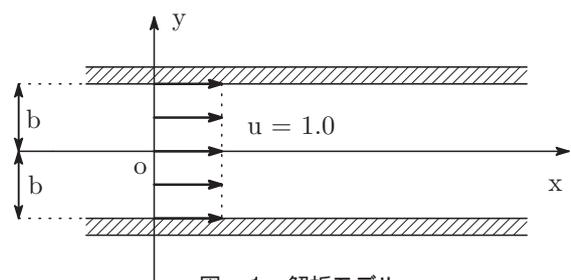
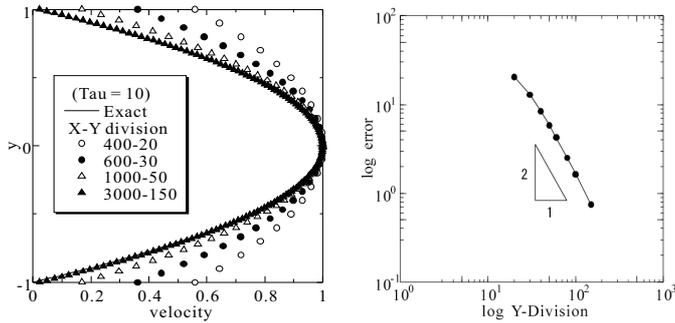


図 - 1 解析モデル

KeyWords: 格子ボルツマン法, 非圧縮性粘性流体, 角柱周り流れ解析

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: kusunoki@civil.chuo-u.ac.jp

方向の流速 ($u = 1.0$) を与え, 上下面の境界条件については non-slip 条件を与える. また, 単一時間緩和係数 τ を 10.0 として, 分割数を変えることによって, 解像度による誤差の収束性について検討した.



(a) 流速図の比較 (b) 解像度と誤差の関係

図-2 分割数による流速分布の比較

解析結果として図-2に, (a) y 軸上の x 方向の流速を解像度の違いによって比較したものと, (b) 解像度と誤差の関係を示す. (a) より, 解像度を上げることによって流速図が厳密解へ近づいていることがわかる. さらに (b) 解像度と誤差の関係より, 解像度と誤差は, 解像度をあげることで, ほぼ 2 次精度で誤差が収束していく様子が確認できる.

(2) 角柱周り流れ問題

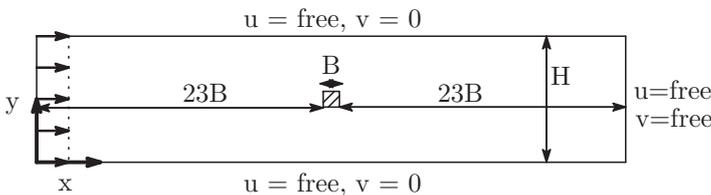


図-3 解析モデルと境界条件

図-3に数値解析モデルを示す. 解析領域は, 図-3に示した流れ方向の全長が $47B$ の領域とした. その入口境界は角柱設置位置より $23B$ 上流に, また出口境界は角柱設置位置から $23B$ 下流に設置されている. 境界条件としては, 入口境界において $U = 0.1$ とする一様流を与えている. さらに, 平行平板流路では slip 条件を, 角柱周りには non-slip 条件を適用した. また, 流出部での密度は一定値であるとし, 流入部と流出部での未知粒子分布関数は平衡分布であると仮定した. なお, $H/B = 16$ として角柱 1 辺の分割数を 20 としたため総格子点数は 301700 となっている.

解析結果として, Reynolds 数が 100 の時で, 無次元時間 400 経過時の圧力分布図を図-4に示す. これにより角柱から剥離した流れから, カルマン渦が発生する様子が解析できていることがわかる. なお, Reynolds 数が 60 まではカルマン渦の発生を確認できたが, Reynolds 数がそれ以下の場合には, カルマン渦は発生しなかった. これは, 実験⁵⁾による結果ともほぼ一致するものである.

次に, 実験値との定量的な比較及び, 閉そく比の影響について検討するため, Reynolds 数が 20~300 という低

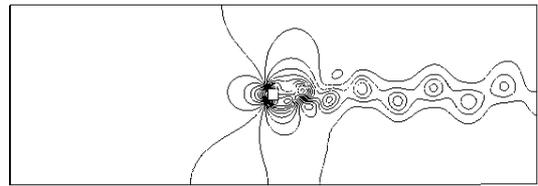


図-4 $Re=100$ 時の圧力分布図

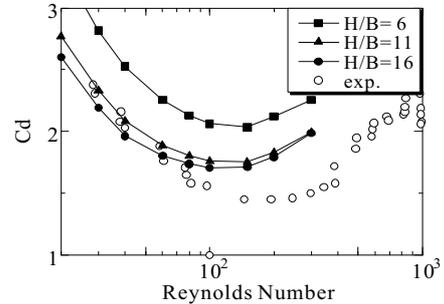


図-5 抗力係数の実験値との比較

Reynolds 数域での抗力係数の実験値⁵⁾との比較を行ったものを図-5に示す. これにより, $H/B = 11$ 及び $H/B = 16$ で Reynolds 数が低い場合においては抗力係数の実験値との比較において, 定性的な一致が得られていることがわかる. しかし, Reynolds 数が 150 を超えると抗力係数を過大に評価してしまい実験値と差異が生じているが, これは本手法は 2 次元解析であり, 流れの 3 次元性を考慮していないことによるものと考えられる. また, $H/B = 6$ においては抗力係数の値が全体的に実験値に比べ過大に評価されており, 閉そく比が解析結果に影響を与えていることがわかる.

4. 終わりに

本論文では, 数値解析例として Poiseuille 流れ問題及び角柱周り流れ問題を取り上げ, LBM の有効性の検討を解析精度の観点から行った結果, 以下の結論を得た.

- 解像度と誤差の関係については, 解像度をあげることで, ほぼ 2 次精度で誤差が収束していくことが確認できた.
- 抗力係数の実験値との定量的な比較において, 定性的な一致を得ることができた.
- 閉そく比が狭すぎることにより, 解析結果に影響が生じることが確認された.

今後の課題としては, LBM の非構造格子への拡張などが挙げられる.

参考文献

- 1) S.Chen, and Doolen,G.D.: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, pp.329-364, 1998.
- 2) S.Succi: The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, *Oxford University Press*, 2001.
- 3) 稲室隆二: 格子ボルツマン法, 物性研究, pp.197-232, 2001.
- 4) 立石 純也, 櫻山和男: CIVIA-格子ボルツマン法による非構造格子を用いた非圧縮性粘性流体の解析, 土木学会応用力学論文集, 土木学会, **7**, pp.323-329, 2004.
- 5) 清水優史, 谷田好通: 長方形断面柱状体に働く流体力, 日本機械学会論文集, **44**, pp.2699-2705, 1978.