

## 剛塑性体における位相最適化に関する一考察

京都大学大学院 学生会員 西藤 潤

### 1. はじめに

形状の位置やつながり方などを最適化するいわゆる位相最適化問題は Bendsøe, Kikuchi<sup>1)</sup> の研究以降、広い分野で注目されている。Bendsøe らは線形弾性体を対象に位相最適化の研究を行った。近年では非線形型応答をしめす材料に対しても位相最適化の研究が活潑に行われている。しかしながら、弾性変形を完全に無視したいわゆる剛塑性体を対象にした位相最適化の研究は見受けられない。そこで、本報告では剛塑性体の位相最適化問題を解くための基礎的な考え方を示す。

### 2. 剛塑性体の位相最適化問題

本論文の目的は「ある与えられた外荷重に対して、塑性崩壊しないような物質の形状のうち、もっともコストが低くなるものをもとめること」である。対象とする剛塑性体の位相は密度分布を用いて決定する。ここで、密度は空間において物質が占める割合と定義する。物質のない空間には空隙が存在すると仮定する。2次元の有限要素法の場合、要素  $i$  の密度  $\rho_i$  は、次のように与えられる。

$$\rho_i = \frac{\text{要素 } i \text{ において物質が占める面積}}{\text{要素 } i \text{ の面積}}$$

$$= 1 - \frac{\text{要素 } i \text{ において空隙が占める面積}}{\text{要素 } i \text{ の面積}}$$

$\rho_i = 1$  のときには要素  $i$  は全て物質で占められており、 $\rho_i = 0$  のときには要素  $i$  には全く物質が存在しない。

図-1 に境界値問題のモデルを示す。物質の配置を許容する領域を設計領域  $\Omega$  とし、この領域内で物質の最適な密度  $\rho$  の分布を求める。設計領域  $\Omega$  は、斉次 Dirichlet 境界  $S_u$  と Neumann 境界  $S_\sigma$  によって囲まれている。外荷重  $f$  は非斉次 Neumann 境界  $S_\sigma$  上で与えられる。

混合型有限要素法<sup>2)</sup> の定式化に倣い、静力学的な制約条件を課すと、解くべき問題は次のような式で表される。

$$C(\rho) \rightarrow \min$$

$$\text{sub.to } \begin{cases} f = B^t \sigma \\ g(\sigma, \rho) + s = 0 \\ 0 \leq s \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

目的関数は密度  $\rho$  を変数にもつコスト関数  $C(\rho)$  であり、設計変数である密度  $\rho$  に関して最小化を行う。1 つめの制約条件は「力の釣合式」を表している。 $B$  は  $B$  マトリクス、 $\sigma$  は応力を表している。2 つめと3 つめの制約条件は「系が塑性崩壊しないこと」を意味している。降伏関数が負でない ( $g_i(\sigma, \rho) < 0$ ) とき、要素  $i$  が崩壊していないとすると、系全体が塑性崩壊しない条件は  $g \leq 0$  で表される。これを、非負の slack 変数  $s$  を用いて等式制約に

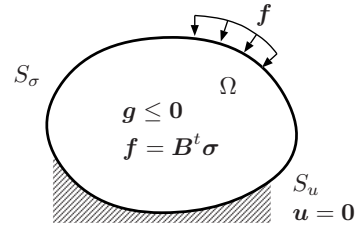


図-1 境界値問題

変換すると、2 つめの制約条件が得られる。4 つめの制約条件は「密度  $\rho$  が 0 から 1 の間の値をとること」を意味している。この制約条件は、密度の定義より明らかである。

### 3. 主双対内点法による定式化

問題 (1) は非線形の主双対内点法を用いて解くことができる。最適化問題 (1) に対する Lagrange 関数は

$$L(\sigma, s, \rho, u, \lambda, t, v_0, v_1)$$

$$= C(\rho) + u^t (f - B^t \sigma) + \lambda^t (g + s)$$

$$- t^t s - v_0^t \rho - v_1^t (1 - \rho) \quad (2)$$

として定義される。ただし、 $u, \lambda$  は等式制約に対する Lagrange 乗数であり、 $t, v_0, v_1$  は不等式制約に対する非負の Lagrange 乗数である。このとき問題 (1) に対する KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) は次のように表される。

$$\frac{\partial L}{\partial u} = f - B^t \sigma = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g + s = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -B u + \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^t \lambda = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \lambda - t = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{\partial C}{\partial \rho} + \left( \frac{\partial g}{\partial \rho} \right)^t \lambda - v_0 + v_1 = 0 \quad (7)$$

$$t^t s = 0, \quad t \geq 0, \quad s \geq 0 \quad (8)$$

$$v_0^t \rho = 0, \quad v_0 \geq 0, \quad \rho \geq 0 \quad (9)$$

$$v_1^t (1 - \rho) = 0, \quad v_1 \geq 0, \quad 1 - \rho \geq 0 \quad (10)$$

KKT 条件式 (6)–(10) は非負の Lagrange 乗数  $t, v_0, v_1$  を消去でき、次のようにまとめることができる。

$$S \lambda = 0 \quad (11)$$

$$R \left\{ \frac{\partial C}{\partial \rho} + \left( \frac{\partial g}{\partial \rho} \right)^t \lambda \right\} = 0 \quad (12)$$

$$\lambda \geq 0, \quad s \geq 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (13)$$

ここで、 $S = \text{diag}(s_i)$ 、 $R = \text{diag}(\rho_i(1 - \rho_i))$  である。

キーワード 位相最適化, 有限要素法, 剛塑性体

連絡先 〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町 京都大学大学院社会基盤工学専攻 TEL 075-753-4794

KKT 条件から求めた式 (3), (4), (5), (11), (12), (13) を同時に満足する解を Newton-Raphson 法を用いて求める。ただし、解の更新は更新した解が式 (13) を満足するように行う。

4. 解析結果

コスト関数は、密度  $\rho$  と要素の面積  $a$  の内積とする。

$$C(\rho) = \rho^t a \tag{14}$$

降伏関数は、密度  $\rho$  によらず等方性を有し、次の表されると仮定する。

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \rho) = \sqrt{\left\{ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)/2}{a(\rho)} \right\}^2 + \left\{ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)/2}{b(\rho)} \right\}^2} - 1 \tag{15}$$

$a(\rho), b(\rho)$  は、 $\rho = 1$  のとき  $a = 1, b = M$ 、 $\rho = 0$  のとき  $a = m, b = m$  であり、 $0 < \rho < 1$  のとき  $\rho = 1$  と  $\rho = 0$  を線形補間するような関数である。  $M$  は十分大きい数、 $m$  は十分小さい数である。この降伏関数 (15) は、 $\rho = 1$  のとき von-Mises の降伏基準とよく似ている。これは、 $M = \infty$  とすれば von-Mises の降伏基準と一致することからも分かる。  $\rho = 0$  のときは、微小な応力に対しても塑性崩壊を生じる。

解析対象は縦の長さ 2.50、横の長さ 1.00 からなる矩形の領域である。左側を固定し、右側の中央に鉛直下向きの力を加える。図-2 にその問題図を示す。図-2 は解析に用いた有限要素メッシュである。全体の要素数は 640、節点数は 697 である。設計領域全体が  $\rho = 1$  で均質な剛塑性体である場合、崩壊荷重は  $P_c = 0.202$  である。

ここでは、例として均質な場合の崩壊荷重  $P_c$  の 1/2 の荷重と 1/4 の荷重を与える 2 つのケースを考える。図-4、図-5 にそれぞれ  $P = P_c/2, P = P_c/4$  に対して位相最適化問題を解いた結果を示す。色の濃いところほど密度が高いことを表している。何も描かれていない領域は密度が  $\rho = 0$  となっており、物質が存在していないことを表している。図-4、図-5 から分かるように、どちらのケースにおいても 2 本の部材からなる  $\pi/4$  の角度をもつトラスのような形状を得た。弾性体を対象にした位相最適化問題でも同様に 2 部材トラスのような結果が報告されている<sup>3)</sup>。また、2 部材トラスを対象に位相を最適化する問題(図-6)を解くと、部材と水平方向のなす角  $\theta = \pi/4$ 、断面積  $A$  は荷重に比例するという結果が得られ、本報告の解析結果と一致する。

5. おわりに

本論文で得られた結果を以下に述べる。1. 剛塑性体の位相最適化アルゴリズムを主双対内点法を用いて、具体的に示した。2. 矩形の設計領域を対象に位相最適化を行い、数値解を得た。得られた最適解は納得のいくものであった。

ついで、今後の課題を以下に述べる。1. 本論文では、単純な境界値問題しか解いていない。今後は複雑な設定の

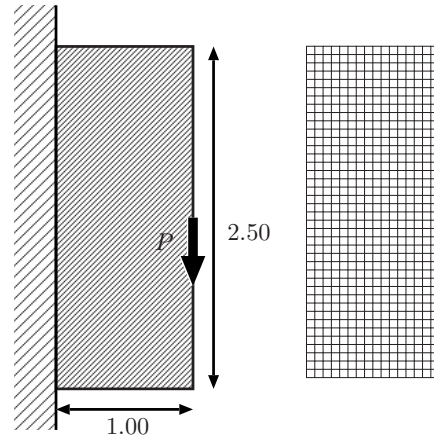


図-2 設計領域と境界条件 図-3 有限要素メッシュ

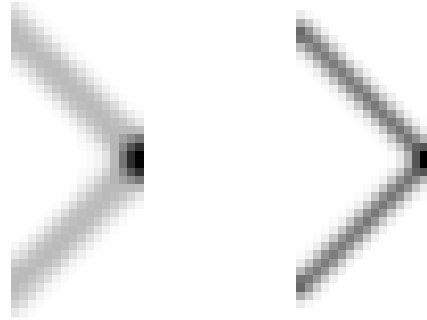


図-4 最適な位相 (P = Pc/2)

図-5 最適な位相 (P = Pc/4)

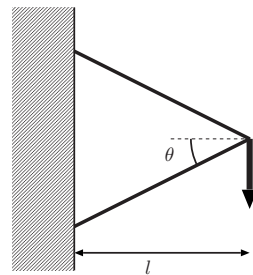


図-6 トラスの問題

A : 断面積  
 S : 軸力  
 $\sigma_c$  : 限界塑性応力  
 未知数 :  $\theta, A$   
 $\frac{2Al}{\cos \theta} \rightarrow \min$   
 sub.to  $\begin{cases} S \sin \theta = P \\ \frac{S}{A} \leq \sigma_c \end{cases}$

問題を解き、本論文で示した位相最適化アルゴリズムの適用可能性について検討したい。2. 今回の解析では、問題を解く上で理想的な降伏関数を用いた。今後は、密度と降伏関数の関係を十分に考慮した上で位相最適化を行いたい。  
 参考文献

1) Bendsøe, M. P., Kikuchi, N. : Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* Vol.71, pp.197-224, 1988. 2) 小林俊一 : 主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.95-106, 2003. 3) Suzuki, K. and Kikuchi, N. : A homogenization method for shape and topology optimization, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* vol. 93, pp.291-318, 1991.