多数の曲面により構成される領域の境界要素法モデルの作成に関する基礎的研究

福井大学大学院　学生会員　○　今度　薫
福井大学大学院　正会員　福井 卓雄

1　はじめに

高速多重極法を利用した境界要素解析法により、境界要素データを使った大規模問題の解析が可能になってきている。このような大規模問題の解析においては境界データの作成は容易ではない。効率よく解析を行うためには、データ作成を自動化する必要がある。この目的で、田中らによって提唱された確率的サンプリング法を用いて、最適な境界要素を生成手法を開発してきた [1][2]。

本研究では、これまでに得た成果をもとに、多数の曲面により構成された領域に対しての境界要素生成手法について基礎的な研究を行う。

2　曲線交差決定のアルゴリズム

2.1　確率的サンプリング法

田中らによって、陰関数表記された曲面においてサンプリング点を生成するための新しい確率微分計算法「確率的サンプリング法」（SSM）が提案されている [3][4]。この方法は、各ステップにおけるサンプリング点の変位量 dx_i を確率過程と見て、確率微分方程式

$$dx_i(t) = dx_i^T(t) + dx_i^N(t) + dx_i^S(t) \tag{1}$$

を解くことにより、一連の点列を決定する方法である。ここに、dx_i^T は正規乱数により選んだ任意変位の接平面への射影を取る項、dx_i^N は曲面に垂直方向の補正項、dx_i^S は確率過程を伊藤積分により補正する項である。計算は極めて高速であり、数十万点のサンプリングを１秒以内に実行することができる。

2.2　交差決定のアルゴリズム

陰関数表示された二つの曲面、I_A、 I_B

$$F_A(x) = 0 \qquad F_B(x) = 0$$

の交差曲線を決定するアルゴリズムは、上の SSM を使って与えることができる。この交差は、I_A と I_B のどちらかの確率微分方程式を解き、サンプリング点が他方の曲面上にもあるように選ぶことで求められる。ここでは、I_A の式を解くことを選ぶ。I_A での確率微分方程式の解は、その曲面上のサンプリング点を与える。もし、得られたサンプリング点列が曲面 I_B を内側から外側 (あるいは外側から内側) へまたぐときには、それらの間に I_A と I_B との交差点が存在する。ここでは、I_A 上のサンプリング点 x_A を次のように符号化する。

$$\mathrm{sgn}F_B(x_A) \equiv \begin{cases} 1 & \mathrm{if} F_B(x_A) > \epsilon \\ -1 & \mathrm{if} F_B(x_A) < -\epsilon \\ 0 & \mathrm{otherwise} \end{cases}$$

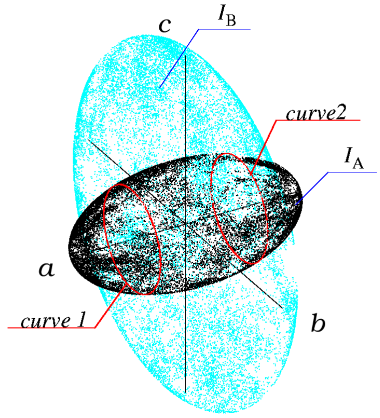
ここで、ϵ は計算上の誤差を回避するための定数である。これより、求められた x_A を、曲面 I_B の内側と外側に分類することができる。

曲面の交差曲線上の点を決定する手順は次のようになる。

1. 曲面Ａ上のサンプリング点を確率的サンプリング法により求め、すべてのサンプリング点 $x_A(t)$ について $\mathrm{sgn}F_B(x_A(t))$ を定める。
2. ステップ t_1、t_2 におけるサンプリング点の組 $\{x_A(t_1), x_A(t_2)\}$ について
$$\mathrm{sgn}\{F_B(x_A(t_1))\}\mathrm{sgn}\{F_B(x_A(t_2))\} = -1 \tag{2}$$
が起きたとき、サンプリングを一時停止して、$x_A(t_1)$、$x_A(t_2)$ を用いて交差曲面上の点を Newton 法により決定する。
3. もし、十分に長い時間 t_{max} にわたり式 (2) が起きない場合には、計算を止める。この場合には、曲面同士が交差しないと判断する。

2.3　サンプリングと交差曲線上の点決定の例

前述の方法を用いて、サンプリング点と交差曲面上の点を決定した例を図–1 に示す。2 つの楕円体の径は、下表の



図–1　楕円体の交差

キーワード：境界要素法, 要素生成, 確率的サンプリング法
連絡先　：〒 910-8507　福井市文京 3-9-1，TEL0776-27-8596, FAX0776-27-8746

通りである。楕円体 A 上の点を黒色、楕円体 B を水色、交差曲線上の点を赤色で表示した。

	a	b	c
楕円体A	2	1	1
楕円体B	1	3	3

3 領域形成の考え方

上の方法より、I_A 上、I_B 上および、交差曲線上のサンプリング点が得られる。これらを用いれば、部分曲面

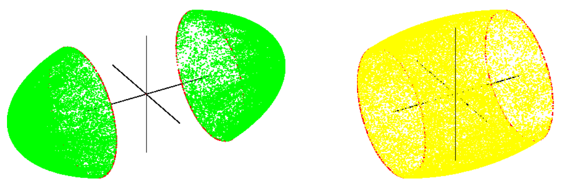
$$I_{Ao} = \{x : F_A(x) = 0, F_B(x) > 0\}$$

$$I_{Ai} = \{x : F_A(x) = 0, F_B(x) < 0\}$$

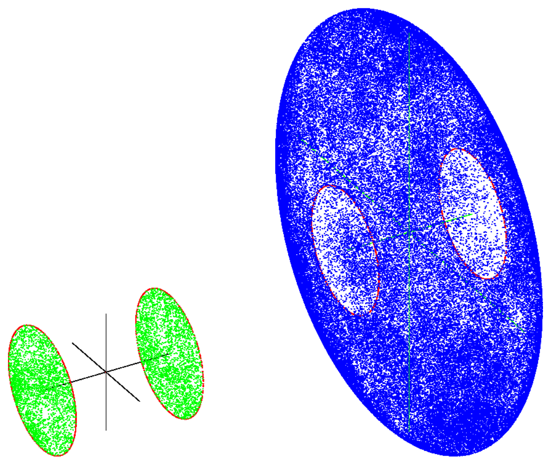
$$I_{Bo} = \{x : F_A(x) > 0, F_B(x) = 0\}$$

$$I_{Bi} = \{x : F_A(x) < 0, F_B(x) = 0\}$$

を求めることは容易である。先の例に基づいて、これらの曲面を表示したものが、図–2、図–3 である。図–2 図–3 においては、曲面の境界となる交差曲面を同時に示している



図–2 楕円体Aの分割



図–3 楕円体Bの分割

これらの曲面を組み合わせることにより、2 つの楕円体の組合わせで形成される領域の境界を表現することは容易である。楕円体領域を E_A、E_B、交差曲線を C_{AB} とすれば、例えば、和領域 $E_A \cup E_B$ の境界について、

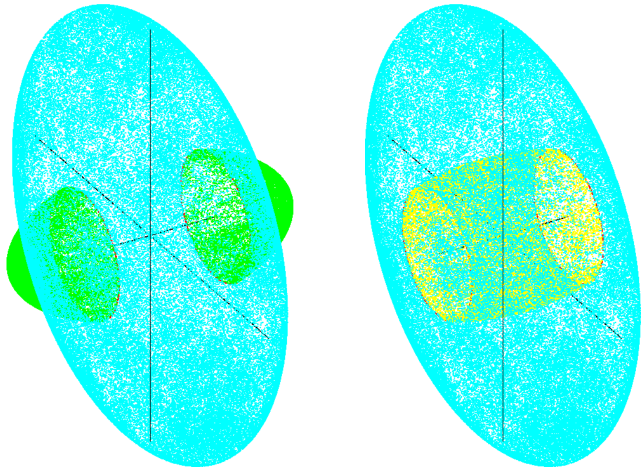
$$\partial(E_A \cup E_B) = I_{Ao} + I_{Bo} + C_{AB} \quad (3)$$

で表現され、差領域 $E_A - A_B$ の境界については、

$$\partial(E_A - E_B) = I_{Ao} + I_{Bi} + C_{AB} \quad (4)$$

で表現することができる。これらのサンプル点図を図–4 に示す。これらにおいて C_{AB} を含めておけば、境界要素作成時に有効に利用できる。

以上の操作においては、有界な曲面を、曲面上の点 x_1、$\cdots$、x_n および、その境界上の点 $\hat{x}_1$、$\cdots$、$\hat{x}_m$ の組により表現することを基本としている。3 つ以上の曲面を扱うためには、これらにさらに頂点を加える必要があるが、領域境界の部品をすべてこの形式で表現することは可能である。領域の定義に Bool 演算を用いれば、統一的なデータ構造を用いた境界部品の選択が可能となり、複雑な領域の境界も統一的に形成することが可能であると考えられる。



図–4 $\partial(E_A \cup E_B)$(左) および $\partial(E_A - E_B)$(右)

4 おわりに

多数の曲面により構成される領域の境界を決定するために、確率的サンプリング法によって得られる曲面上の点集合を用いる方法を提案した。

領域の境界を曲面上の点集合で表した部分曲面の和として表現することが可能であることを示した。部分曲面における境界要素生成には、これまでの方法 [1] を用いることが可能である。

参考文献

[1] 福井卓雄：確率的サンプリング法を利用した任意曲面の境界要素モデル作成手法, 計算数理工学コンファレンス論文集, **3**, 2003.

[2] 今度薫、上田哲也、福井卓雄：3 次元 CAD を用いた不定形構造要素の境界要素法モデルの作成に関する基礎的研究, 土木学会第 60 回年次学術講演会概要集, 2005

[3] Tanaka.S, A.Morisaki, S.Nakata, Y.Fukuda, and H.Yamamoto: Sampling implicit surfaces based on stochastic differential equations with converging constraint, *Computers & Graphics*, 24, pp.419-431, 2000.

[4] Tanaka.S, Y.Fukuda, and H.Yamamoto: Stochastic algorithm for detecting intersection of implicit surfaces, *Computers & Graphics*, 24, pp.523-528, 2000.