2次元粘弾性波動問題における演算子積分法を用いた高速多重極境界要素法

福井大学大学院　学生会員　○　石田 貴之
福井大学大学院　正会員　　　福井 卓雄

1　はじめに

本論文では, 2 次元粘弾性波動問題において, 演算子積分法を用いた時間域境界要素法への高速多重極法の適用を目的とする。演算子積分法は, 時間域問題で課題とされている解の安定性を向上させることができる。さらに高速多重極法は, 計算の高速化を可能にする。スカラー波動問題および, 周波数領域における弾性問題への適用については, すでに検討されてきた。ここでは, 時間域における 2 次元粘弾性波動問題への, 演算子積分法, 高速多重極法の適用を試みる。

2　演算子積分法を利用した時間域境界要素法

2.1　粘弾性波動問題

等方均質な線型粘弾性体を仮定すると, 物体力が作用しない場合の初期値境界値問題は,u_i, ρ をそれぞれ変位, 密度とすると

$$\mu * \dot{u}_{i,jj} + (\lambda+\mu) * \dot{u}_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i \ \ \text{in } B \tag{1}$$

$$u_i = u_i^0, \ \ \dot{u}_i = v_i^0 \ \ \text{in } B$$

$$u_i = \bar{u}_i \ \ \text{on } \partial B_1, \ \ n_j \sigma_{ji} = T_{ij}^n u_j = \bar{t}_i \ \ \text{on } \partial B_2 \tag{2}$$

と書ける。ここに, $\lambda(t), \mu(t)$ はそれぞれ $\lambda(t) = 0, \mu(t) = 0, -\infty < t < 0$ を満足する緩和関数である。$(\dot{\ })$ は時間微分を表し, T は表面力作用素を表す。また, 境界応力ベクトルを与える応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij} = \lambda * \dot{u}_{k,k}\delta_{ij} + \mu * (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) \tag{3}$$

で与えられる。

ここで, Laplace 変換を考えると 式 (1) は

$$\mu^* \hat{u}_{i,jj} + (\lambda^* + \mu^*)\, \hat{u}_{j,ji} = \rho s^2 \hat{u}_i \tag{4}$$

となる。$(\hat{\ })$ は Laplace 変換を表す。ここに 複素弾性係数 $\lambda^*(s), \mu^*(s)$ は $\lambda(t), \mu(t)$ の Laplce 変換を用いて

$$\lambda^*(s) = s\hat{\lambda}(s), \quad \mu^*(s) = s\hat{\mu}(s) \tag{5}$$

で与えられる。またこれに対応して複素位相速度を

$$c_L(s) = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}}, \quad c_T(s) = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}} \tag{6}$$

で表す。

式 (4) から分かるように粘弾性問題も弾性問題と同じ形で書くことができ, その扱いも同様にできる。

キーワード：境界要素法, 演算子積分法, 高速多重極法, 粘弾性波動問題
連絡先：〒 910-8507 福井市文京 3-9-1, TEL0776-27-8596, FAX0776-27-8746

2.2　演算子積分法を利用した境界積分方程式

演算子積分法を利用するために, 空間領域の近似基底 Φ_I を導入し, 演算子積分法による近似表現を用いることで

$$C_{ij}(\boldsymbol{x}) \sum_{I=1}^{N} \Phi_I(\boldsymbol{x}) u_{j,I}(n\Delta t) = \tilde{u}_i(\boldsymbol{x}, t)$$

$$+ \sum_{I=1}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} [A_{ij,I}^{n-k}(\boldsymbol{x}) t_{j,I}(k\Delta t) - B_{ij,I}^{n-k}(\boldsymbol{x}) u_{j,I}(k\Delta t)] \tag{7}$$

となる。ここに, 影響関数 $A_{ij,I}^m$, $B_{ij,I}^m$ は

$$A_{ij,I}^m(\boldsymbol{x}) = \frac{r^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{G}_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s_l) \Phi_I(\boldsymbol{y}) e^{-2\pi i m l/L} dS_y \tag{8}$$

$$B_{ij,I}^m(\boldsymbol{x}) = \frac{r^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{S}_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s_l) \Phi_I(\boldsymbol{y}) e^{-2\pi i m l/L} dS_y \tag{9}$$

となる。ここに, $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$ である。また r は, 誤差を ϵ として, $r^L = \sqrt{\epsilon}$ の関係を条件として決定する。Laplace 変換解 $\hat{G}$, $\hat{S}$ は, それぞれ次のように与えられる。

$$\hat{G}_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{2\pi\mu^*} \Big\{ K_0(\kappa_T |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\, \delta_{ij} - \frac{1}{\kappa_T^2} \left[K_0(\kappa_T |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) - K_0(\kappa_L |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \right]_{,ij} \Big\} \tag{10}$$

$$\hat{S}_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = T_{jk}^n \hat{G}_{ki}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}, s) \tag{11}$$

ここに, $\kappa_L = s/c_L, \kappa_T = s/c_T$ とする。また, K_n は第 2 種変形 Bessel 関数である。

3　高速多重極境界要素法

3.1　高速多重極法

高速多重極法は, N 個の点による相互作用を O(N) の計算量で実行することができる。近似境界積分方程式 (7) の右辺の積分 $\sum_{I=1}^{N} A_{ij,I}^m(\boldsymbol{x}_j) t_{j,I}(k\Delta t)$ にこの方法を用いると, 効率よく計算することができる。そのためには, 動弾性場における多重極展開の表現, 変換の関係が必要となる。

3.2　多重極展開

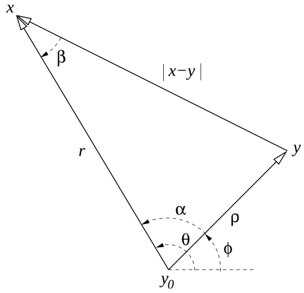
変形 Bessel 関数に対する Graf の加法定理は

$$K_m\left(\sqrt{z^2 + \zeta^2 - 2z\zeta\cos\alpha}\right) = e^{-im\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{m+n}(z)\, I_n(\zeta)\, e^{in\alpha} \qquad |z| > |\zeta| \tag{12}$$

となる。ここに, I_n は第一種変形 Bessel 関数である。また β は

$$\zeta \sin\alpha = \sqrt{z^2 + \zeta^2 - 2z\zeta\cos\alpha}\ \sin\beta$$

$$z - \zeta\cos\alpha = \sqrt{z^2 + \zeta^2 - 2z\zeta\cos\alpha}\ \cos\beta$$



図–1 多重極展開: 源点 $\boldsymbol{y}$, 観測点 $\boldsymbol{x}$, 多重極点 $\boldsymbol{y}_0$

により求められる。以下では, 変形 Bessel 関数の引数は $\kappa|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ であるので, $z=\kappa|\boldsymbol{x}|$, $\zeta=\kappa|\boldsymbol{y}|$ とおき, $\boldsymbol{y}_0$ に関する極座標表現 $\boldsymbol{x}=(r,\theta)$, $\boldsymbol{y}=(\rho,\phi)$ を用いることで, 図–1 のように表せる。よって, 式 (12) は

$$K_m(\kappa|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)= e^{-im\beta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}K_{m+n}(\kappa r)I_n(\kappa\rho)e^{in\alpha} \qquad r>\rho \quad (13)$$

と書くことができ, Helmholtz 型方程式の基本解の多重極展開は次のように表せる。

$$\frac{1}{2\pi}K_0(\kappa|x-y|)= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[I_n(\kappa\rho)e^{-in\phi}\right]K_n(\kappa r)e^{in\theta} \quad (14)$$

3.3 基本解の多重極展開

まず, ベクトル場 u_i の表現について示す。任意の変位ベクトル場は, スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル ψ によって

$$u_i(\boldsymbol{x})=\phi_{,i}+e_{3ij}\psi_{,j} \quad (15)$$

と表わすことができる。

ここで, 縦波および横波の基本解

$$g_L(r)=\frac{1}{2\pi}K_0(\kappa_L r), \quad g_T(r)=\frac{1}{2\pi}K_0(\kappa_T r) \quad (16)$$

を導入し, それによる変位場の表現を示す。集中荷重 X_j が与えられたとき, 変位 u_i^G は式 (10) の $\hat{G}_{ij}$ を用いて

$$u_i^G(\boldsymbol{x})=\hat{G}_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})X_j = \frac{1}{\rho s^2}\left[((g_L)_{,k}X_k)_i+e_{3ij}\left(e_{3kl}(g_T)_{,l}X_k\right)_{,j}\right] \quad (17)$$

と書くことができる。これは 式 (15) と同じ形であり, 第 1 項および第 2 項は, 縦波成分と横波成分を表している。それぞれの成分を $\phi^G(\boldsymbol{x})$ および $\psi^G(\boldsymbol{x})$ とおき式 (14) より多重極展開で表すと

$$\phi^G(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-X_k\frac{\partial}{\partial y_k}\left(I_n(\kappa_L\rho)e^{-in\phi}\right)\right]K_n(\kappa_L r)e^{in\theta}$$

$$\psi^G(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-e_{3kl}X_k\frac{\partial}{\partial y_l}\left(I_n(\kappa_T\rho)e^{-in\phi}\right)\right]K_n(\kappa_T r)e^{in\theta}$$

となり, 多重極モーメントは

$$M_n^G=-X_k\frac{\partial}{\partial y_k}\left(I_n(\kappa_L\rho)e^{-in\phi}\right) \quad (18)$$

$$N_n^G=-e_{3kl}X_k\frac{\partial}{\partial y_l}\left(I_n(\kappa_T\rho)e^{-in\phi}\right) \quad (19)$$

となる。

第二基本特異解についても同様に考えると, 変位場 u_i^S は式 (11) の $\hat{S}_{ij}$ を用いて

$$u_i^S(\boldsymbol{x})=\hat{S}_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})U_j = -\left(V_{jk}(g_L)_{,jk}\right)_{,i}-e_{3im}\left[e_{3kn}V_{jk}(g_T)_{,nj}\right]_{,m} \quad (20)$$

となり, (15) の形で表すことができる。ここに,

$$V_{jk}=\frac{1}{\rho s^2}\left(\lambda\delta_{jk}n_mU_m+G(n_kU_j+n_jU_k)\right) \quad (21)$$

である。また, 多重極モーメントは以下のようになる。

$$M_n^S=V_{jk}\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_k}\left(I_n(\kappa_L\rho)e^{-in\phi}\right) \quad (22)$$

$$N_n^S=e_{3kn}V_{jk}\frac{\partial^2}{\partial y_n\partial y_j}\left(I_n(\kappa_T\rho)e^{-in\phi}\right) \quad (23)$$

3.4 展開係数の変換

高速多重極法を用いる上で必要となる, 多重極点の移動による関係式をまとめておく。多重極点の移動 $M2M$ は, 局所展開点への移動 $M2L$, 局所展開点の移動 $L2L$ は

$$M_n'=\sum_{m=-\infty}^{\infty}M_mI_{n-m}(\kappa_L\rho)e^{-i(n-m)\phi} \quad (24)$$

$$L_n=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^mM_mK_{n+m}(\kappa_L\rho)e^{i(n+m)\phi} \quad (25)$$

$$L_n'=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-m}L_mI_{n-m}(\kappa_L\rho)e^{i(n-m)\phi} \quad (26)$$

と書ける。この関係は N_n,ψ の場合も同様である。

3.5 高速多重極アルゴリズム

高速多重極法は, 階層構造を導入することで, 多くの要素からの影響をそれと等価な多重極点で置き換え, 計算を高速化する方法である。ここでは, 4 分木構造を用いた。その過程で, 式 (24), (25), (26) などを用い係数を決定し, 多くの影響を一括して計算することができる。

4 おわりに

2 次元粘弾性波動問題における境界要素法解析への, 演算子積分法, 高速多重極法の適用を示した。粘弾性波動問題においても弾性波動問題とほぼ同様に扱うことができた。解析結果は当日報告する。

参考文献

[1] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129–145, 1988.

[2] 福井卓雄, 岡山美央: 演算子積分法を用いた時間領域境界要素法における高速多重極法の適用, 計算工学講演会論文集, **10** pp. 587-590, 2005.