HPM によるひずみエネルギーを指標とした要素細分割法の提案

法政大学 (JIP テクノサイエンス 株式会社)　　正会員　○見原　理一
法政大学　　正会員　　竹内　則雄

1．目的

著者らは，ハイブリッド型の仮想仕事の原理[1]を基礎にペナルティ法の概念を応用したハイブリッド型ペナルティ法(HPM：Hybrid-type Penalty Method)と称する新しい離散化手法を提案した[2]．HPM では，全体領域を部分領域に分割し，それぞれの部分領域において独立に変位場が定義される．このとき，領域の節点は領域形状を認識するためだけに用いられ，FEM のように自由度は持たない．したがって，局所的に強い強非線形性が現れるような問題の場合，要素の部分的な細分化を行うことでより精度の向上が図ることが可能である．本研究ではひずみエネルギーを指標とした要素細分割法を紹介する．

2．ハイブリッド型仮想仕事の原理

いま，**図 1** に示すように領域Ωが閉境界$\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$で囲まれた$M$個の部分領域$\Omega^{(e)} \subset \Omega$から構成されているものとする．

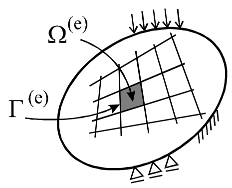


図 1　部分領域$\Omega^{(e)}$

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{M} \Omega^{(e)} \text{ただし} \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \quad (r \neq q) \tag{1}$$

また，$\overline{\Omega}^{(e)} := \Omega^{(e)} \cup \partial\Omega^{(e)}$を$\Omega^{(e)}$に境界を加えてできる閉包とする．

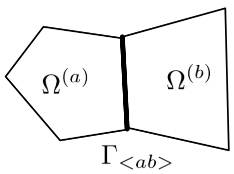


図 2　部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$の共通の境界$\Gamma_{<ab>}$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では，**図 2** に示すように，隣接する 2 つの部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$の共通の境界$\Gamma_{<ab>}$，すなわち，

$$\Gamma_{<ab>} \overset{\text{def.}}{=} \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \tag{2}$$

において，付帯条件

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)} = \tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)} \quad \text{on} \quad \Gamma_{<ab>} \tag{3}$$

を Lagrange の未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$を用いて，

$$H_{ab} \overset{\text{def.}}{=} \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)} - \tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)})\, dS \tag{4}$$

と表し，仮想仕事式に導入する[3]．ただし，$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)}$ならびに$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)}$は，それぞれ，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$上の変位を表している．

いま，隣接する 2 つの部分領域境界辺の数をNとすると，ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる．

$$\sum_{e=1}^{M} \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{grad}(\delta \boldsymbol{u}) dV - \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{u}\, dV \right)$$
$$- \sum_{s=1}^{N} \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)} - \tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)})\, dS \right) - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{u}\, dS = 0$$
$$\forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathbb{V} \tag{5}$$

なお, Lagrange の未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$は, 次式のように, $\Gamma_{<ab>}$上の表面力を意味している[2].

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{t}^{(a)}(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)}) = -\boldsymbol{t}^{(b)}(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{t}^{(a)}$と$\boldsymbol{t}^{(b)}$は，それぞれ，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$上の表面力である．

3．ひずみエネルギーの算出

せん断ひずみエネルギーは，部分領域のせん断ひずみγ_{xy}，面積Aを用いて算出する．

$$\text{Shear Strain energy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 A \tag{7}$$

全ひずみエネルギーは，部分領域の各応力値・ひずみ値および面積を用いて算出する．

$$\text{Total Strain energy} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}]^T[\boldsymbol{\varepsilon}]A \tag{8}$$

それぞれのひずみエネルギーを用いて全部分領域内で最も大きくなる部分領域を細分割する．

キーワード　ハイブリッド型ペナルティ法，要素細分割，ひずみエネルギー
連絡先　〒135-0016　東京都江東区東陽 2-4-24　JIP テクノサイエンス(株) 解析技術部　TEL:03-5690-3201

４．数値解析例

純せん断が作用する問題として，**図 3** に示すような正方形領域を考え，その側面に強制変位量を作用させた．また，初期の要素分割数は，8×8 分割とした．

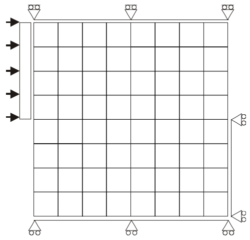
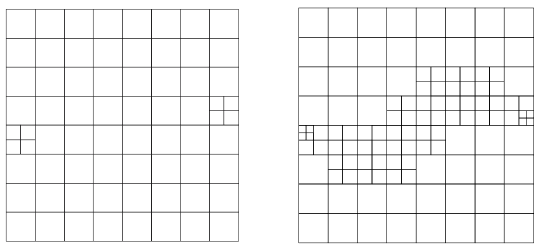


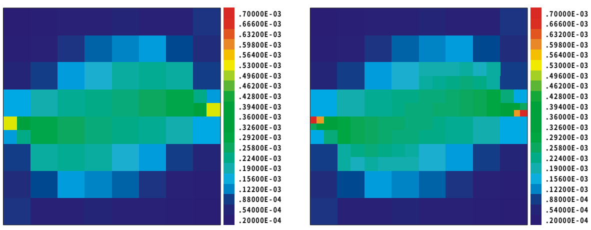
図 3 解析モデル

前述したようにせん断ひずみエネルギーを指標とした要素の細分割を繰り返すことで，**図 4** に示すように対称性を保ちつつ，要素の細分割が行なわれていることが分かる．また，**図 5** に示すように，要素の細分割を行なうことで，せん断ひずみの局所化が進行していることも確認できる．



Step2　　Step10

図 4 要素細分割の経過



Step2　　Step10

図 5 最大せん断ひずみ

続いて，V ノッチを有する鋼板の引張問題を紹介する．解析モデルを**図 6** に示す．

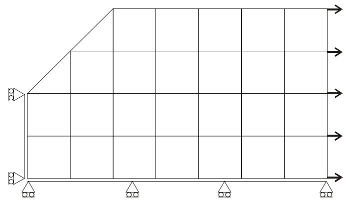
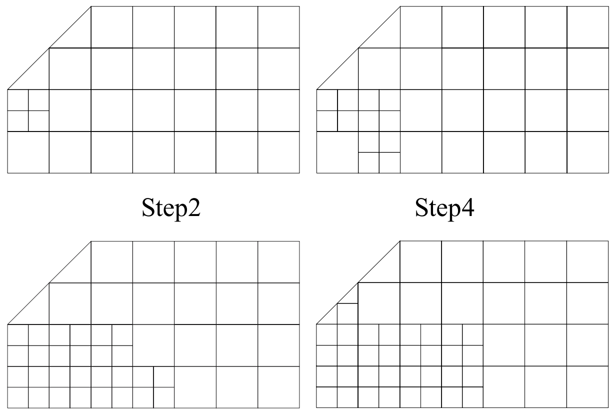


図 6 解析モデル

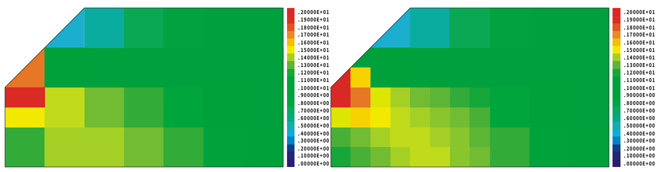
図 7 に示すように，要素の細分割を行なうことで，力が集中するノッチ先端より要素の細分化が行なわれていることが分かる．また，**図 8** に示すように，VonMises 応力についてもノッチ先端に集中していることが確認できる．



Step2　　Step4

Step8　　Step10

図 7 要素細分割の経過



Step2　　Step10

図 8 VonMises 応力

５．まとめ

HPM では，要素を構成する節点が自由度を持たないことから，本論文で紹介したような要素の細分割が可能である．また，本手法を用いてある程度要素分割を繰り返した後，非線形解析を行なえば，解析に費やされる時間を短縮させることも可能であると思われる．今後は，要素細分割後のモデルを用いた非線形解析を行ない，既往の実験との比較検証を行なう予定である．

参考文献

1) K.Washizu：Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1975

2) 竹内則雄，草深守人，武田洋，佐藤一雄，川井忠彦：ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析，土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000

3) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，日本鋼構造協会編，培風館，1972