

# 三角形要素に基づく Eulerian 解法による大変形固体解析 ～ 内部諸量の移流に関する検討 ～

中央大学大学院 学生員 山田 豊  
中央大学 正会員 櫻山 和男  
広島大学 正会員 岡澤 重信

## 1. はじめに

従来、有限要素法による固体解析で用いられている Lagrangian 解法は、大変形問題において、計算要素の破綻に起因する計算の破綻が生じることがしばしば報告されている。このため、固定の計算要素を用いた Eulerian 解法を用いることで計算要素の破綻に起因する計算の破綻を回避する手法が提案されている<sup>1),2)</sup>。この Eulerian 解法における移流ステップは移流方程式を解くことに帰着する。しかしながら、三角形定ひずみ要素では、応力やひずみなどの内部諸量は要素で一定として与えられるため、それらの内部諸量の移流の取り扱い方法には工夫を要する。

そこで本研究は、非構造格子に基づく Eulerian 解法による大変形解析手法の構築を目的として内部諸量の移流の取り扱いについて検討を行う。なお、移流スキームには CIVA 法<sup>3)</sup>を採用した。数値解析例として棒の衝突解析を取り上げ、本手法の有効性を検討する。

## 2. Eulerian 解法の支配方程式

### (1) operator split 法

Eulerian 解法における支配方程式は、次式のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (1)$$

ここで、式(1)に対して、次式のように operator split 法を用いて2つに分割する<sup>4)</sup>。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathbf{f} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (3)$$

式(2)は、外力項を含んだ非移流ステップ、式(3)は、移流項を含んだ移流ステップにおける方程式である。このとき式(3)における\*印は、非移流ステップ後の値を意味し、式(3)において、応力、ひずみ等の非移流ステップ後の解を固定の計算要素に投影させている。

### (2) 非移流ステップ(動的陽解法)

operator split 法における非移流ステップにおいては、通常の動的陽解法をそのまま用いる<sup>4)</sup>。空間方向に離散化された弾塑性体に対する動的な平衡方程式は、次式のように表される。

$$\bar{M} \dot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{F}_{\text{int}}^n = \mathbf{F}_{\text{ext}}^n \quad (4)$$

ここで  $\bar{M}$  は、対角化された集中質量行列、 $\mathbf{F}_{\text{int}}$  は内力ベクトル、 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  は外力ベクトルを表す。また上添字  $n$  は、現

時刻ステップであることを意味する。式(4)に対して、中央差分法を適用させると時刻  $t^{n+1}$  の位置ベクトル  $\mathbf{x}^{n+1}$  及び、時刻  $t^{n+\frac{1}{2}}$  の速度ベクトル  $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$  は、次式のように求められることができる。

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}} + \dot{\mathbf{u}}^n \Delta t \quad (6)$$

このとき加速度ベクトル  $\dot{\mathbf{u}}^n$  は、式(4)より求まる。

### (3) 移流ステップ(CIVA法)

本研究では、自由境界面を表現するために、VOF (Volume of Fluid) 法<sup>5)</sup>を適用する。移流方程式の計算法には、精度が高く保障される CIVA 法を適用する。CIVA 法では上流側位置において補間を行うことにより物性値  $\phi$  を求めているために、上流側位置の求解が重要となる。また、上流側の要素に対する3次補間曲面は、面積座標 ( $L_1, L_2, L_3$ ) を用いて式(8)のように表現できる。

$$\phi^{n+1}(x, t) = \phi^n(x - \mathbf{u} \Delta t, t - \Delta t) \quad (7)$$

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=-1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1j \neq k}^3 \beta_{jk} (L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3) \quad (8)$$

ここで、 $d$  は、1次補間と3次補間の調節パラメータで、 $d=0$  のとき1次、 $d=1$  のとき3次補間となる。なお  $c$  は、既往の研究で最適値として示された  $c=1/2$  を用いた。係数  $\alpha, \beta$  は、上流側の三角形要素のスカラー量  $\phi$  とその空間微係数により決定される<sup>3)</sup>。

### (4) 内部諸量の取り扱い

本手法では移流方程式は節点ごとに解かれるのに対し、応力やひずみなどの内部諸量は、定ひずみ要素を用いているため要素値として与えられる。本研究では、それらの内部諸量の移流の取り扱い方法として、以下の方法を用いた。

#### a) 要素値として移流

三角形定ひずみ要素において、要素の重心点を擬似的な節点として新たに要素を構築することにより、内部諸量を要素値としてそのまま移流を行う。要素の構築には、元の要素データより重心点の位置を割り出し、その重心点を節点データとして Delaunay 分割を行うことで構築している。

#### b) 節点値として移流

三角形定ひずみ要素において、要素値を節点値に補間することにより、節点で与えられる内部諸量と同様に移流を行う。補間方法としては、最小二乗法および面積補間法を用いた<sup>6)</sup>。

**KeyWords:** Eulerian 解法, 大変形解析, 内部諸量の移流

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: yutaka@civil.chuo-u.ac.jp

### 3. 数値解析例（棒の衝突解析）

#### (1) 解析条件

数値解析例として、棒の衝突解析を取上げる。数値解析モデルは、図1に示すように鋼材に対して鉛直下向きに初期速度 300(m/sec) 与える。また材料特性は、図2に示されるようにバイリニア硬化型の  $J_2$  流れ則を使用し、ポアソン比は 0.28, 密度は  $1710(\text{kg}/\text{m}^3)$  を仮定する。また、解析要素は以下の図-3に、解析ケースは以下の表-1に示すものとする。なおケース1では、図-3中の最構築した要素により、要素で一定として与えられる内部諸量を移流させている。

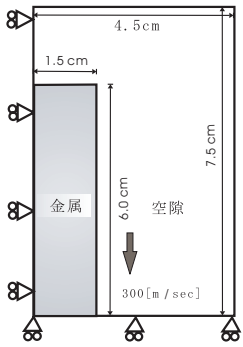


図-1 数値解析モデル

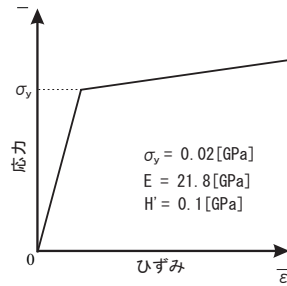
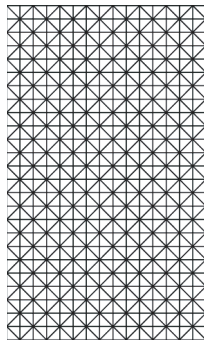


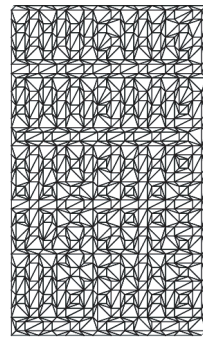
図-2 材料特性

表-1 解析ケース

	内部諸量の取り扱い方法
ケース1	要素値として移流
ケース2	節点値として移流（最小二乗法）
ケース3	節点値として移流（面積補間）



計算要素



内部諸量の移流計算要素

図-3 解析要素

#### (2) 解析結果

図-4に  $80\mu(\text{sec})$  後の変形形状を示す。また、図-5, 6に先端変位の時刻暦, 体積保存率の時刻暦を示す。図-4より、ケース1は滑らかな界面を描いているのに対し、ケース2, ケース3は、界面に不自然な挙動が起きていることが確認できる。図-5より、先端変位に関して、ケース1の要素値として移流させた手法が参照解に最も近い挙動を示しているのに対し、ケース2, ケース3の節点値として移流させた手法では、参照解と良い一致が得られていないことが確認できる。また、図-6より、体積保存率においても、ケース1の有効性が確認できる。

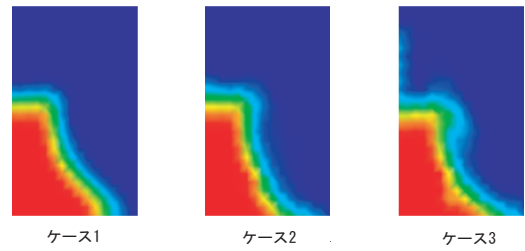


図-4  $80\mu(\text{sec})$  後の変形形状

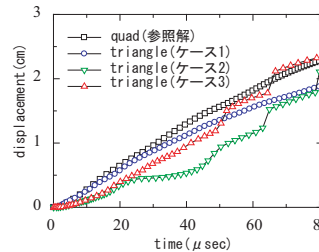


図-5 先端変位の時刻暦

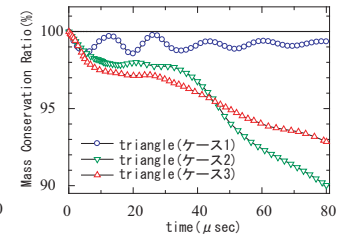


図-6 体積保存率

### 4. おわりに

本研究では、非構造格子に基づく Eulerian 解法による大変形解析手法の構築を目的として内部諸量の移流の取り扱いについて検討を行った。数値解析例として棒の衝突解析を取り上げ、これより以下の結論を得た。

- 本解析結果より、先端変位に関して、内部諸量を要素値として移流させたケース1が参照解に最も近い挙動を示しているのに対し、節点値として移流させたケース2, ケース3は定性的な一致が得られなかった。この原因としては、要素値を節点値に振り分ける際の誤差が逐次大きくなったためと考えられる。
- 3ケースを比較した結果、内部諸量の移流の取り扱いに関して、要素の重心点を擬似的な節点として要素を構築するケース1の優位性が確認された。先端変位に関して、参照解である四角形要素（Lagrangian 解法）の解と比べて過小評価する結果であることについては、体積ロッキングの影響が考えられる。

今後の課題として、体積ロッキングの回避が挙げられる。そして、非構造格子への拡張を考えている。

#### 参考文献

- 1) Benson, D.J.: Computational Methods in Lagrange and Eulerian Hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, pp.235-394, 1992.
- 2) 金子恭久, 櫻山和男, 岡澤重信: Euler型有限要素法による固体の大変形解析, 第54回理論応用力学講演会講演論文集, pp.599-600, 2005.
- 3) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集(B編), 64巻620号, 1998.
- 4) 岡澤重信, 河口篤志, 藤久保昌彦: 各種メッシュ制御における動的陽解法, 応用力学論文集, Vol.6, pp151-158, 2003.
- 5) Hirt, C.W., Nichols, B.D.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J.Comp.Phys.*, 39, pp20-255: 1981.
- 6) 棚橋隆彦: GSMAC 有限要素法による汎用熱流体解析プログラム, アイピーシー, 1991.