各種の応力で表した有限変形 Cam-clay 構成式とその応力積分

東北大学 正会員 ○山川優樹
東北大学 正会員 池田清宏
長岡技術科学大学 学生会員 中市翔也

1. はじめに

Borja and Tamagnini[1)] は変形勾配の乗算分解による有限変形理論に基づき，Cam-clay 降伏関数を Kirchhoff 応力の関数として表し，応力積分法を提案している．しかし，実験結果をもとにした材料定数の決定に際しては，降伏関数や塑性硬化則は Cauchy 応力で記述した方が便利である[2)]．ここでは各種の応力を用いた Cam-clay の定式化と応力積分法を示すとともに，材料応答の違いや収束性など数値解析上の性能評価を行う．

2. 有限変形 Cam-clay モデルの定式化

Cam-clay モデルの降伏関数と塑性流れ則について述べる．降伏関数を Cauchy 応力の不変量 p, q および内部変数である圧密降伏応力 p_{c} の関数として表すと，

$$f(p,q,p_{\mathrm{c}}) = \frac{q^2}{M^2} + p(p-p_{\mathrm{c}}) \leq 0 \tag{1}$$

となる．M は限界状態定数である．Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の等方・偏差成分に関する不変量をそれぞれ，$p = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}[\boldsymbol{\sigma}]$, $q = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|\mathrm{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\|$ と定義している ($\mathrm{dev}[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{1}$)．Kirchhoff 応力の不変量 $\bar{\tau}, \hat{\tau}$ および圧密降伏応力 $\bar{\tau}_{\mathrm{c}}$ を用いても，降伏関数は式 (1) と同様の形式で表すことができる．一方，塑性流れ則は，

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{2}$$

と表される[2)]．ここで $\dot{\lambda}$ は塑性乗数，$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ は変形速度を弾性・塑性部分に加算分解したときの塑性部分である．降伏関数を Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{\tau}$ ではなく Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の関数として表した場合，Clausius–Duhem 形式の散逸不等式から自然に導出される塑性流れ則 (2) は $1/J$ の項を含み，関連型では無くなっている．

次に，塑性硬化則の導出を行う．Cam-clay モデルでは，塑性内部変数として塑性体積ひずみを用いる．変形勾配の乗算分解 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ より体積変化は $J = \det\boldsymbol{F} = J^{\mathrm{e}}J^{\mathrm{p}}$ となり，対数体積ひずみは加算分解で表される．

$$\varepsilon_{\mathrm{v}} = \varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}, \quad \dot{\varepsilon}_{\mathrm{v}} = \dot{\varepsilon}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{e}} + \dot{\varepsilon}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} \tag{3}$$

と表される．ここでは正規圧密および除荷・再載荷での比体積 v と等方応力 p の変化量の関係として，それぞれ

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{v}} = \frac{\dot{v}}{v} = -\tilde{\lambda}\frac{\dot{p}_{\mathrm{c}}}{p_{\mathrm{c}}} \quad \text{for } p = p_{\mathrm{c}}, \qquad \dot{\varepsilon}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{e}} = \frac{\dot{v}}{v} = -\tilde{\kappa}\frac{\dot{p}}{p} \quad \text{for } p > p_{\mathrm{c}} \tag{4}$$

という形式を用いる[3)]．$\tilde{\kappa}, \tilde{\lambda}$ はそれぞれ弾性・弾塑性圧縮係数である．式 (4) と超弾性構成式（詳細は省略）より，

$$\frac{\dot{p}_{\mathrm{c}}}{p_{\mathrm{c}}} = -\Theta\dot{\varepsilon}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}, \qquad \Theta = \frac{1}{\tilde{\lambda} - (1-\tilde{\lambda})\tilde{\kappa}^*} \tag{5}$$

を得る．ここで $\tilde{\kappa}^* = \tilde{\kappa}/(1-\tilde{\kappa})$ である．式 (5) は解析的に時間積分可能であり，塑性硬化則

$$p_{\mathrm{c}} = p_{\mathrm{c}0}\exp\left[-\Theta\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}\right] \tag{6}$$

を得る．定数 Θ の形式は微小変形理論における形式 $\Theta = 1/(\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa})$ と異なっている．

3. リターンマッピングによる応力積分

弾塑性変形を追跡する際は，塑性発展式（塑性流れ則と内部変数の発展則）を増分ステップごとに時間積分する必要がある．Simo[4)] による exponential algorithm と対数ひずみの定義より，増分形式の塑性流れ則は

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mathrm{e,(trial)}} - \Delta\lambda\frac{1}{J_{n+1}}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7}$$

となる．ここで上付き添字 (trial) は弾性予測子であることを示す．塑性硬化則については，式 (5) を時刻 t_n から t_{n+1} までの間で時間積分すると，式 (6) を時間離散化した表現

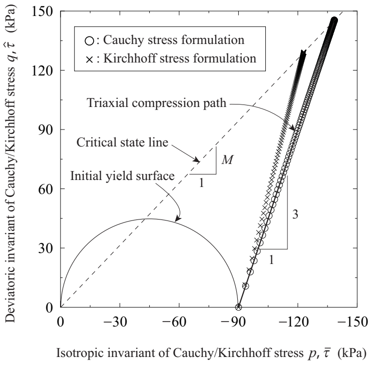
$$p_{\mathrm{c},n+1} = p_{\mathrm{c},n}\exp\left[-\Theta(\varepsilon_{\mathrm{v},n+1}^{\mathrm{e,(trial)}} - \varepsilon_{\mathrm{v},n+1}^{\mathrm{e}})\right] \tag{8}$$

となる．ここでは $\varepsilon_{\mathrm{v},n+1} = \varepsilon_{\mathrm{v},n+1}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{\mathrm{v},n+1}^{\mathrm{p}} = \varepsilon_{\mathrm{v},n+1}^{\mathrm{e,(trial)}} + \varepsilon_{\mathrm{v},n}^{\mathrm{p}}$ という関係を用いている．ひずみ内部変数である塑性体積ひずみ $\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}$ の試行値としては，時刻 t_n での値を用いて $\varepsilon_{\mathrm{v},n+1}^{\mathrm{p,(trial)}} = \varepsilon_{\mathrm{v},n}^{\mathrm{p}}$ とする．式 (8) に基づいて，応力内部変数である先行圧密応力 p_{c} の更新が行われる．

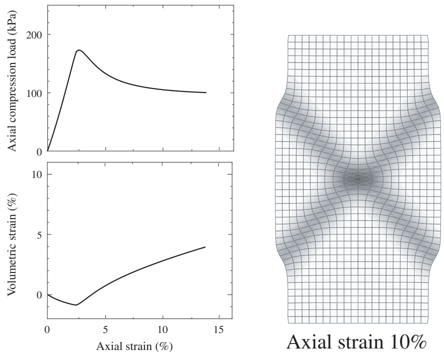
リターンマッピングでは，$f(p_{n+1}, q_{n+1}, p_{\mathrm{c},n+1}) = 0$ の条件下で，式 (7) を $\varepsilon_{\mathrm{v},n+1}^{\mathrm{e}}, \varepsilon_{\mathrm{s},n+1}^{\mathrm{e}}, \Delta\lambda$ について解く．そこで，一般化未知量ベクトル $\boldsymbol{x} = \left[\varepsilon_{\mathrm{v},n+1}^{\mathrm{e}},\ \varepsilon_{\mathrm{s},n+1}^{\mathrm{e}},\ \Delta\lambda\right]^{\mathrm{T}}$，および残差ベクトル

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} J_{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mathrm{e}} - J_{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mathrm{e,(trial)}} + \Delta\lambda\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ f(p_{n+1}, q_{n+1}, p_{\mathrm{c},n+1}) \end{bmatrix} \tag{9}$$

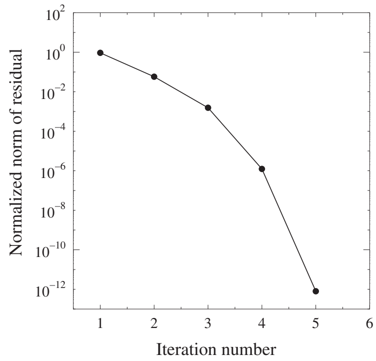
Keywords: 有限変形, 弾塑性構成式, Cam-clay モデル, 応力積分
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7420, Fax: 022-795-7418, E-mail: yamakawa@civil.tohoku.ac.jp



図–1 1要素三軸圧縮の応力経路: 定式化の違いによる比較



図–2 平面ひずみ供試体の解析結果



図–3 反復計算における収束状況

を定義し，非線形方程式 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を $\boldsymbol{x}$ について線形化して反復的に解く．第 k 反復での修正量を $\delta\boldsymbol{x}^{(k)}$ とし，

$$\boldsymbol{R}^{(k)} + \boldsymbol{A}^{(k)} \cdot \delta\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{A}^{(k)} = \frac{\partial \boldsymbol{R}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{x}} \rightsquigarrow \delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\left[\boldsymbol{A}^{(k)}\right]^{-1} \cdot \boldsymbol{R}^{(k)}, \quad \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \delta\boldsymbol{x}^{(k)} \quad \cdots\cdots (10)$$

というように $\|\boldsymbol{R}\| < \mathrm{TOL}$ となるまで $\boldsymbol{x}$ を更新を繰り返す．

陰解法 FEM で Newton–Raphson 法本来の 2 次収束を確保するには，応力積分アルゴリズムに整合した consistent 接線係数が必要である．通常の速度型弾塑性構成式における接線係数は時間微分を取ることで求められるが，consistent 接線係数は前述のリターンマッピングで解く非線形方程式の線形化を経て次のように導出される．

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{ep}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e,(trial)}}} \quad \cdots\cdots (11)$$

この具体形は省略するが，Cam-clay モデルの場合には，降伏関数を Cauchy 応力・Kirchhoff 応力のどちらで表記するかに関わらず，関連流れ則を用いても $\boldsymbol{a}^{\mathrm{ep}}$ は対称とはならない．これは，Cam-clay モデルでは内部変数として塑性体積ひずみを用いており，内部変数の発展則が関連型では無いことに起因する．

4. 数値計算例

(1) 1 要素の三軸圧縮

要素応答特性を調べるため，1 要素の 3 次元有限要素モデルを用いて正規圧密粘土の三軸圧縮変形を解析した．降伏関数を Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$, Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{\tau}$ の関数として表したものをそれぞれ Cauchy stress formulation, Kirchhoff stress formulation と称し，両者の比較を行う．両定式化ともに材料定数は $\mu_0 = 5400\,\mathrm{kPa}$, $\alpha = 0$, $\tilde{\lambda}\ (= \tilde{\lambda}^*) = 0.13$, $\tilde{\kappa}\ (= \tilde{\kappa}^*) = 0.018$, $M = 1.05$, $p_0 = p_{c0} = -90\,\mathrm{kPa}$, $v_0 = 1.85$ とした．得られた応力経路を**図–1** に示す．同図では，Cauchy stress formulation の結果を p–q 面で，Kirchhoff stress formulation の結果を $\bar{\tau}$–$\hat{\tau}$ 面でそれぞれ示してある．一般に実験結果は現応力（Cauchy 応力）ないしは公称応力で整理されることが多いが，前者は三軸圧縮の応力経路を正確に辿っているのに対し，後者ではその応力経路からずれている．実験結果から材料定数を決定し，それを数値解析に用いる場合には，Cauchy stress formulation を用いる方が便利である．

(2) 平面ひずみ供試体の変形解析

境界値問題の解析例として，Cauchy stress formulation を用いて平面ひずみ供試体の変形解析を行った．形状比 2.25 の供試体の上下端面は節点拘束による摩擦境界とし，側面には 98 kPa の拘束圧を与えた．これを 4 節点要素で縦方向 45 要素，横方向 20 要素の全 900 要素に分割した．重い過圧密粘土を模して，材料定数は $\mu_0 = 3769\,\mathrm{kPa}$, $\alpha = 0$, $\tilde{\lambda} = 0.13$, $\tilde{\kappa} = 0.006$, $M = 0.90$, $p_0 = -49\,\mathrm{kPa}$, $p_{c0} = -735\,\mathrm{kPa}$, $v_0 = 1.65$ とした．軸ひずみ約 15％に達するまで解析を行った．軸ひずみー軸荷重関係と軸ひずみー体積ひずみ関係を**図–2** 左に示す．軸ひずみ 10％時における変形状態とひずみ分布を**図–2** 右に示す．過圧密粘土に見られるひずみ軟化により，×印状のひずみ集中域を形成している．**図–3** には，軸ひずみ 10％付近における反復計算の収束状況を示す．この段階では既に荷重極大点を過ぎて変形の局所化が進行しており，多くの数値積分点で塑性負荷から除荷へと転じているが，こうした状況下でも良好な 2 次収束が得られており，consistent 接線係数の威力が発揮されている．

参考文献

1) R. I. Borja, C. Tamagnini: Cam-Clay plasticity Part III: Extention of the infinitesimal model to include finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 155, pp. 73–95, 1998.
2) G. Meschke, W. N. Liu: A re-formulation of the exponential algorithm for finite strain plasticity in terms of cauchy stresses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 173, pp. 167–187, 1999.
3) K. Hashiguchi: On the linear relations of V–$\ln p$ and $\ln v$–$\ln p$ for isotropic consolidation of soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* Vol. 19, pp. 367–376, 1995.
4) J. C. Simo: Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 99, pp. 61–112, 1992.