

非線形現象を考慮した繰り込み理論の展開

中央大学大学院 学生員 ○佐藤 学

中央大学理工学部 正会員

山田 拓也

中央大学大学院 正会員 山内 格

中央大学理工学部 フェロー会員

山田 正

1.はじめに

密度成層をした流体からの取水時には流体内部において波動が存在することが既往の研究により明らかにされている。山田ら^{1) 2)}はこの波動に着目し線形理論により理論展開を行い、解析解を得ている。本研究では非線形の干渉を考慮した数値計算を行った。さらに繰り込み理論を用いて取水幅を求め、数値計算の結果と比較することで選択取水の問題を1つのケースとして波動の非線形の干渉の取り扱いについて考察した。

2.理論

2.1 過去の研究 山田ら^{1) 2)}は運動方程式中の移流項を部分的に残した Oseen 近似に基づく理論展開を行い、解析の基本式として式(1)を得ている。ここで ψ はラグランジュの流れ関数である。さらに、式(1)を無次元化しラプラス変換することで波動現象を示す式(2)を導出している。式(2)の解はある種の波動現象を表しており、この波動は固有関数(モード)によって決まる伝播速度 C_n をもっており、 $C_n = 1/n\pi$ と示されている。 C_n を次元をもつ形で表すと $d/n\pi T$ での上流に遡上し得るモード(n)は $d/n\pi T > q/d$ を満たし、これを内部フルード数で表すと $1/n\pi > Fr$ となる。つまり、モード(n)によっては波速が平均流速よりも小さくなり上流に遡上できないものも存在することを示している。また、ある点で観測していると遡上しうる全てのモードが出揃った以後は流れは定常となることを示している。この時の解を準定常解と呼び、式(3)で示されている。また、山田ら^{1) 2)}は2次元選択取水の実験もあわせて行い、選択取水の定量的な把握には非線形の領域まで解析を進めねばならないと言及している。

$$\frac{D^2 \nabla^2 \psi}{Dt^2} + \varepsilon g \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \nu \frac{D}{Dt} \frac{\partial^2 \nabla^2 \psi}{\partial y^2} \quad (1) \quad \bar{\varphi}_n(p) = \frac{A_n}{Kp} \cos k b \sin k \eta \exp \left(-\frac{pk\xi}{\sqrt{p^2+1}} \right) \quad (2) \quad \varphi_0 = Fr \left\{ -\eta - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\pi} \cos n\pi b \sin n\pi \eta \right\} \quad (3)$$

2.2 繰り込み理論

山田ら^{1) 2)}により取水開始直後には貯水池内にポテンシャル流れが発生することが示されている。その時の断面平均流速 V と全水深 d 及び流速分布の第1モードが通過するときの取水層内の平均流速を V_1 、取水層厚を取水幅 δ と定義すると連続式として式(4)を得る。また、取水開始時の内部フルード数は $Fr_0 = VT/d$ であり、第1モードが通過するときの内部フルード数 Fr_1 を Fr_0 を用いて式(5)のように表すことが出来る。ここで、第1モードが通過した場を新たなポテンシャル流れとして考えると、連続式とフルード数の関係から第2モードが到達したときの内部フルード数 Fr_2 を取水開始時の内部フルード数 Fr_0 を用いて式(6)のように表す。以降、順々に n 次のモードまで繰り込むことにより、 n 次モードの Fr_n が式(7)として求まる。

$$Vd = V_1 \delta \quad (4) \quad Fr_2 = \frac{V_2 T}{\delta} = Fr_0 \left(\frac{d}{\delta} \right)^4 \quad (5) \quad Fr_1 = \frac{V_1 T}{\delta} = Fr_0 \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \quad (6) \quad Fr_n = Fr_0 \left(\frac{d}{\delta} \right)^{2n} \quad (7)$$

ここで以下に述べる数値実験で考えている取水口高さ b は0.5であり、式(3)により $\cos n\pi b$ は n が奇数で0、偶数で $(-1)^{n/2}$ である。よって中層取水の場合の第1モードは $n=2$ である。したがって $Fr_n = 1/2\pi$ なので式(21)の関係を求めることができ、式(21)の両辺に対数をとると n に関する関係式(22)が得られる。

$$Fr_0 \left(\frac{d}{\delta} \right)^{2n} = \frac{1}{2\pi} \quad (8) \quad n = \frac{1}{2} \left[\log(Fr_0 \times \pi) \right] / \log \left(\frac{\delta}{d} \right) \quad (9)$$

導出された n を $n^*=n+1$ に代入することで n 次モードでの取

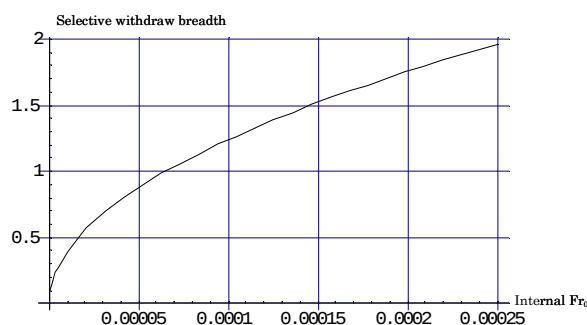


図-1内部フルード数と取水幅の関係

キーワード：選択取水、内部波、内部フルード数、密度成層

〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院 河川・水文研究室 TEL) 03-3817-1805

水幅を求める.以上の繰りこみ理論を適用し,図示したものが図-1,図-2 である.図-1 は内部フルード数と取水幅の関係を示しており, 取水流量が小さくなるにつれて取水幅が減少してゆくことが分かる.これは山田ら^{1) 2)}の研究でも同様のことが示されている.また,図-2 は内部フルード数とモード(n)の関係を示しており, 内部フルード数が小さくなるにつれて,より高次のモードが発生することが分かる.

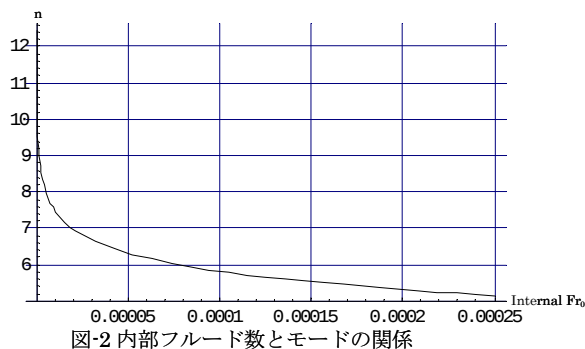


図-2 内部フルード数とモードの関係

3. 数値実験

非線形現象を把握するため数値実験を行った.

3.1 基礎方程式 基礎方程式としてレイノルズ方程式及び連続式,さ

らに移流拡散方程式を用いている. **3.2 初期条件及び境界条件** 本研究の数値実験で設定した貯水池を図-3 に示す. 2次元取水を再現するため,下流端の河床から鉛直上方35m地点に幅1mの取水口を設定した.初期条件としては貯水池内全域の各地点における流速を 0m/s

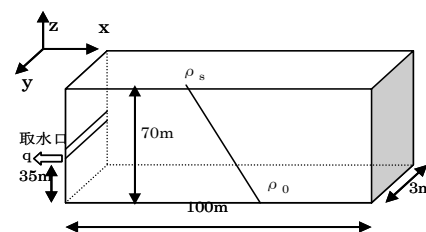


図-3 数値実験で設定した貯水池

とする($u=0\text{m/s}, v=0\text{m/s}, w=0\text{m/s}; 0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 70$). また,貯水池内の密度分布としては表面密度 $\rho_0=999.7042[\text{kg/m}^3]$,底面密度 $\rho_s=1019.484[\text{kg/m}^3]$ とし,貯水池表面から線形に増加する密度分布を仮定した.境界条件は下流端境界条件として取水口から一定単位幅流量 $q=0.056\text{m}^2/\text{s}$ で取水し,取水時の流速分布を放物線与えた.この時の内部フルード数は $Fr=2.167 \times 10^{-4}$ である.上流端境界条件には密度成層を破壊しない流速で取水口から取水される流量と等量の流量を与えている.さらに全ての境界をスリップ条件とした. **3.3 数値実験結果** 図-4 に取水開始後 3 分後,及び 18 分後の貯水池内下

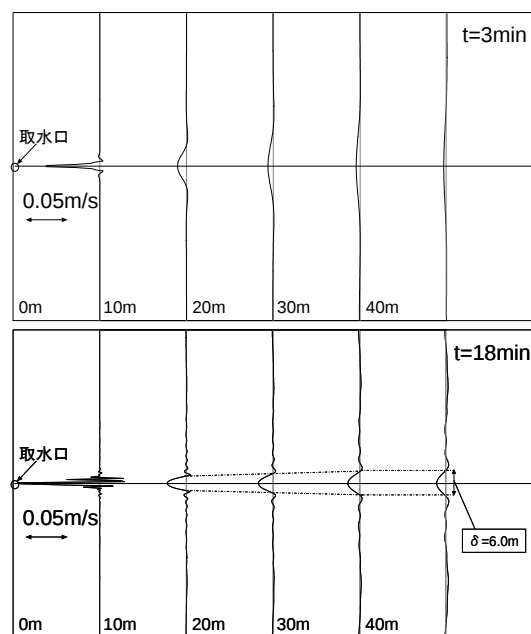


図-4 貯水池内下流部の流速分布

流部における流速分布を示す.図-2 からある鉛直分布をもった流速分布が上流に遡上しているように見える.これは山田ら^{1) 2)}の研究により示されている伝播速度 C_n をもつ波動現象を示しており,Pao³⁾らはこの波動を”columnar wave”と呼んでいる.また,3 分後と 18 分後の流速分布を比較すると取水口高さの速度が増大しているのが分かる.これは,次々と到達するモードによって流速分布が細く鋭くなっ

ていくからであろう.

4.繰り込み理論結果と数値実験結果の比較

繰り込み理論による解は図-1 より内部フルード数 $Fr=2.167 \times 10^{-4}$ において取水幅 $\delta=1.8\text{m}$ である.また, 数値実験より求められた取水幅は図-4 の破線で示すように取水開始後 18 分後において取水幅 $\delta=6.0\text{m}$ である.数値実験の結果が理論解よりも 3 倍程度大きくなっていることが分かる.これは数値実験の内部フルード数が極端に小さいため遡上しうる全てのモードが出揃うことが出来ず,山田ら^{1) 2)}の研究により示されている観測点断面の流れが定常状態となる前の取水幅を数値実験の結果として考えているからであろう.

5.まとめ

線形解を繰り込むことによって非線形解を導出し,さらに 3 次元数値計算を用いて貯水池内の流動解析を行い, 双方の結果を比較することで,非線形現象を繰り込み理論で表現できることを示した.

<参考文献> 1) 吉川秀夫, 山田正, 水谷俊孝, 第22回水理講演会論文集, pp95-100, 1978年. 2) 山田 正, 吉川 秀夫, 水谷 俊孝, 土木学会論文報告集 第280号, pp 67-79, 1978年12月. 3) Pao, H.P. and Kao, T.W. : Dynamics of establishment of selective withdrawal from a line sink, Part 1, Theory, J. Fluid Mech. 65, 1974.