

バックグラウンドメッシュを用いた界面追跡法による波動・跳水現象の解析

中央大学 正会員 ○田中 聖三
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

自由表面流れは移動境界問題の一つであり、時々刻々と複雑に変化する界面を有する流れである。この自由表面流れ問題に対する数値解析手法はこれまでに数多く提案されているが、その中でも界面追跡法は、自由表面を直接的に表現するため、その形状を正確に把握することができる有効な手法である。しかしながら、界面追跡法では、砕波や跳水といった複雑で大変形を伴う自由表面形状を有する問題においては、解析メッシュに破綻が生じて解析が困難となる場合が多く、解析上の問題点となる。著者らは、これまでにこの解析メッシュの破綻に対して、バックグラウンドメッシュに基づくメッシュ再構築手法を提案し、幾つかのベンチマーク問題によりその有効性について検討していた¹⁾が、海岸工学や河川工学分野などへの応用問題に対する検討はなされていなかった。

そこで本論文では、界面追跡法による複雑、大変形する自由表面形状を有する流れ解析を行うものであり、界面追跡法で大きな問題となる解析メッシュの破綻を克服するために、バックグラウンドメッシュに基づくメッシュ再構築手法を用いた解析手法の有効性を検討するものである。数値解析例として、潜堤周りの波動問題、跳水問題を取り上げ、本手法の有効性について検討する。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と離散化

非圧縮性粘性流体において、流速 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ および圧力 $p(\mathbf{x}, t)$ は、それぞれ式 (1), (2) の ALE 表記された運動方程式および連続式に支配される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = 0 \quad \text{on } \Omega_t, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Omega_t, \quad (2)$$

ここで ρ , $\mathbf{f}$, $\bar{\mathbf{u}}$ はそれぞれ密度、物体力、メッシュ移動速度を含む相対流速を表し、 Ω は流体領域を表している。 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p)$ は Newton 流体の応力テンソルを表す。また、境界条件は、次のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } (\Gamma_t)_g, \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{on } (\Gamma_t)_h, \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ はそれぞれ流速、トラクションの既知量を示し、 $(\Gamma_t)_g$, $(\Gamma_t)_h$ はそれぞれ Dirichlet 型、Neumann 型境界を示す。また、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを示す。

自由表面においては、以下の運動学的条件を満たす必要がある。

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{fs}, \quad (5)$$

ここで、 Γ_{fs} は自由表面である。自由表面上では、力学的条件として stress-free 条件が適用される。

先の基礎方程式に対して、空間方向の離散化に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法²⁾を適用し、時間方向の離散化には、Crank-Nicolson 法を用いる。以上の離散化過程により導かれる非線形方程式に対して、Newton-Raphson 法により線形化を施し、その際、得られる連立 1 次方程式のを Matrix-Free 法に基づく GMRES 法を用いて解くことにより、未知量である流速 $\mathbf{u}$, および圧力 p を求める。

(2) 解析領域の更新方法

自由表面上では、式 (5) の運動学的条件を満たす必要がある。本手法では、任意の自由表面形状を表現するため、自由表面上の節点移動方向として、自由表面に対する法線方向とした。そのため、自由表面上の節点変位 $\mathbf{v}$ は以下のように定義される。

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \Delta t, \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトル、 Δt は微小時間増分量を表す。解析領域内部の移動量は、式 (??) の自由表面上の節点変位を境界条件とした線形弾性方程式を解くことにより求め、解析領域の更新を行う。

(3) バックグラウンドメッシュを用いたメッシュ再構築手法

これまでに説明をした解析手法により、自由表面流れ問題を解析することは可能であるが、複雑な自由表面形状となった場合には、解析メッシュの破綻が生じてしまい、解析を進めることができなくなってしまう。そこで本研究では、この問題を克服するため、バックグラウンドメッシュを用いたメッシュ再構築手法¹⁾を導入する。本メッシュ再構築手法は、あらかじめ解析領域全体を、バックグラウンドメッシュと呼ばれる有限要素で分割しておき、これを基準として、各時刻で得られた自由表面形状を表現し、解析メッシュを再構築するものである。メッシュ再構築の手順および、解析アルゴリズムの詳細は、文献¹⁾をご参考されたい。

3. 数値解析例

(1) 潜堤周りの波動解析

本メッシュ再構築手法を用いた ALE 有限要素法の有効性を検討するために、潜堤周りの波動問題の解析^{3), 4)}を行った。解析モデルとして、図-1 に示すような、潜

Key Word: 自由表面流れ, 界面追跡法, ALE 有限要素法
〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27
TEL 03-3817-1815, FAX 03-3817-1803

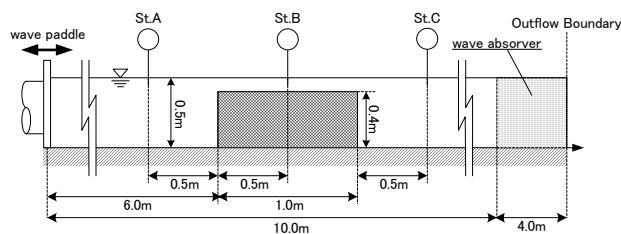


図-1 解析モデル

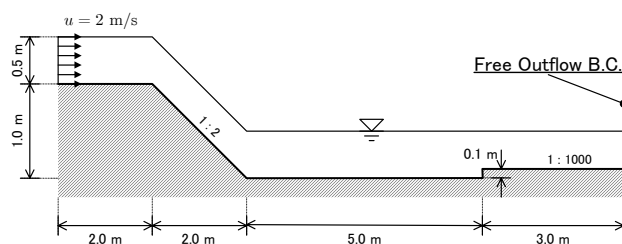


図-4 解析モデル

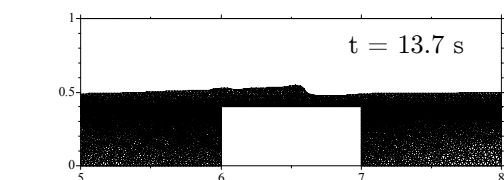


図-2 潜堤近傍の流体領域形状 (Time=13.6 s)

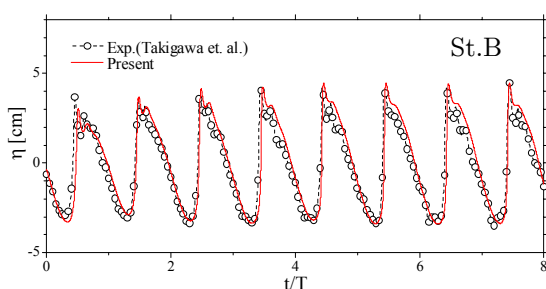


図-3 潜堤中央 (St.B) での水位の時刻歴



図-5 自由表面形状 (t=31.2, 33.6, 34.1s)

4. おわりに

本論文では、界面追跡法による複雑な自由表面流れ解析における、バックグラウンドメッシュに基づく解析手法の有効性について検討を行った。数値解析例として、潜堤周りの波動問題および跳水問題を取り上げ、以下の結論が得られた。

- 本手法による解析結果は実験値と良い一致を示し、本手法の有効性を示すことができた。
- 本手法は、自由表面形状が、複雑かつ大変形する問題を解析することが可能である。

今後は、本問題において実験値等との詳細な比較検討を行うとともに、より複雑な現象に対して本手法を適用していく予定である。

参考文献

- 1) 田中聖三, 檜山和男: 界面追跡法による自由表面流れ解析のためのメッシュ再構築手法, 応用力学論文集, 土木学会, **7**, pp.313-321, 2004.
- 2) Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advanced in Applied Mechanics*, **28**, pp1-44, 1991.
- 3) 滝川清, 山田文彦, 松本健作: 潜堤上碎波変形の内部特性とその数値解析, 海岸工学論文集, 土木学会, **42**, pp.66-70, 1996.
- 4) 桜庭雅明, 檜山和男: Level set 法を用いた安定化有限要素法による自由表面流れの数値解析, 海岸工学論文集, 土木学会, **50**, pp.16-20, 2003.
- 5) Papanastasiou, T.C., Malamataris, N. and Ellwood, K.: A new Outflow boundary condition, *International Journal of Numerical Methods in Fluid*, **14**, pp587-608, 1992.

堤に対して、沖から入射波を与えるものとする。流出境界条件として、岸側境界でSommerfeldの放射条件を与え、その手前に4mのエネルギー減衰帯を設けた。入射波条件は、波高: $H=4.5\text{cm}$ 、周期: $T=2.0\text{s}$ の波を造波した。境界条件として水路底面でslip条件を与え、潜堤壁面でno-slip条件を与えた。有限要素分割には、最小メッシュ幅:1cmの非構造格子をバックグラウンドメッシュとして用いた。解析結果として、図-2に時刻 $t=13.7\text{s}$ での流体領域形状を示すが、この図より、潜堤周辺の水面形を表現できていることがわかる。また、図-3に潜堤中央 (St.B) での水位変動量 η の時刻歴を示す。この図より本解析結果は、実験値³⁾と良い一致を示していることがわかる。

(2) 跳水問題

大変形する自由表面流れ問題への本手法の有効性を検討するために、跳水問題を取り上げる。図-4に示す解析モデルのような、勾配1:2の導流部を有する水路を用いた。流入条件として、流量 $1\text{m}^3/\text{s}$ (奥行き1mを仮定)を、流出境界では、Free Outflow B.C.⁵⁾を与えた。また、水路底面には境界条件として、slip条件を与えた。解析結果として、図-5に各時刻での有限要素メッシュを示す。これらの図より、自由表面形状が大変形する跳水現象を解析することが可能であることがわかる。今後は、実験値等との比較により、本手法の計算精度の検討を行う予定である。