

CIVA/VOF 法による構造物周辺の自由表面流れ解析

中央大学大学院 学生員 ○四谷 宣之
中央大学 正会員 田中 聖三
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

河川・海岸構造物を計画・設計する際には、構造物周辺の流況を正確に把握する必要がある。このような検討は、これまで主に実験により行われてきたが、近年コンピュータの発達により数値解析による検討も数多く行われている。

そこで、本研究では、複雑な自由表面を有する構造物周辺の流況を定量的に把握するため、ロバスト性の高い界面捕捉法の一つである VOF 法¹⁾に基づく流況解析手法の構築を行う。流れ場の離散化手法としては、SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し、要素としては、任意形状への適合性に優れた P1P1(流速・圧力一次)要素を用いる。また、自由表面位置を決定する界面関数に関する移流方程式の解法には、CIVA 法³⁾を用いる。数値解析例として、不透水性構造物越流問題⁴⁾を取り上げ、本手法の有効性を検討する。

2. 解析手法

(1) 基礎方程式

本研究における基礎方程式は、以下に示す非圧縮性粘性流体の Navier-Stokes 運動方程式 (1)、連続式 (2) を用いる。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

式 (1) における応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は以下の式 (3) で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (4)$$

ここで各記号について、 Ω は解析領域、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は物体力、 p は圧力、 μ は粘性係数を表す。

(2) 安定化有限要素方程式による定式化

基礎方程式 (1)、(2) に対して SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると、以下の弱形式 (5) が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left\{ \tau_{supg} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\ & \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{cont} \nabla \cdot \mathbf{w} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、式 (5) における $\mathbf{w}$ は運動方程式の重み関数、 q は連続式の重み関数である。また、 $\tau_{supg}, \tau_{pspg}, \tau_{cont}$ は安定化パラメーターであり式 (6)、(7)、(8) を用いる。

$$\tau_{supg} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$\tau_{pspg} = \tau_{supg} \quad (7)$$

$$\tau_{cont} = \frac{h_e}{2} \|\mathbf{u}\| \xi(Re_u) \quad (8)$$

$$Re_u = \frac{\|\mathbf{u}\| h_e}{2\nu} \quad (9)$$

$$\xi(Re_u) = \begin{cases} \left(\frac{Re_u}{3} \right) & (Re_u \leq 3) \\ 1 & (Re_u > 3) \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 h_e は要素サイズ、 ν は動粘性係数、 Re_u は要素レイノルズ数である。式 (5) に対して、P1/P1(流速・圧力1次)要素を用いて補間を行うと以下に示す有限要素方程式 (11)、(12) が得られる。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\delta}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{K}(\mathbf{u}^*) + \mathbf{K}_{\delta}(\mathbf{u}^*)) \mathbf{u} \\ & - (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\delta}) p + \mathbf{S} \mathbf{u} - (\mathbf{N} + \mathbf{N}_{\delta}) \mathbf{f} = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}_{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \mathbf{u} - \mathbf{N}_{\varepsilon} \mathbf{f} + \mathbf{C}_{\varepsilon} p = 0 \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{N}$ は係数行列であり、添字 δ , ε は、それぞれ SUPG 項、PSPG 項に起因するものを表す。また、 $\mathbf{u}^*$ は移流速度であり、2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いる。

時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用し、連続式は陰的に取り扱う。また、連立一次方程式の解法には Element by Element 法に基づく Bi-CGSTAB 法を用いる。

(3) 自由表面位置の計算

自由表面位置を決定する界面関数 (VOF 関数) は、以下の式 (13) に示す移流方程式により求められる。^{1) 2)}

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (13)$$

ここで、 ϕ は VOF 関数を表し、液相領域では $\phi=1$ 、気相領域では $\phi=0$ 、自由表面上では $\phi=0.5$ となる。また、各節点における気体、液体の密度及び粘性係数は、計算された VOF 関数を用いることにより以下の式 (14)、(15) より決定される。

$$\rho = \rho_{Liq} \phi + \rho_{Gas} (1 - \phi) \quad (14)$$

$$\mu = \mu_{Liq} \phi + \mu_{Gas} (1 - \phi) \quad (15)$$

ここで、 ρ_{Liq} は液体の密度、 ρ_{Gas} は気体の密度、 μ_{Liq} は液体の粘性係数、 μ_{Gas} は気体の粘性係数である。

KeyWords： 自由表面流れ解析, 安定化有限要素法, VOF 法, CIVA 法, 不透水性構造物

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: n36041@educ.kc.chuo-u.ac.jp

界面位置を決定するための移流方程式 (13) の解法には, CIVA 法³⁾を用いる。

CIVA 法は, 移流方程式の高精度解法である CIP 法を三角形要素に対して適用可能となるように拡張した方法である。計算方法は, 移流方程式の厳密解である式 (16) を用いて, $\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ の解を求めるために, $t - \Delta t$ の値である $\phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t)$ を用いる。なお, 上流点 $\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t$ に位置する ϕ^n の値は, 図-1 に示す上流側の要素内で補間することにより求める。

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t) \quad (16)$$

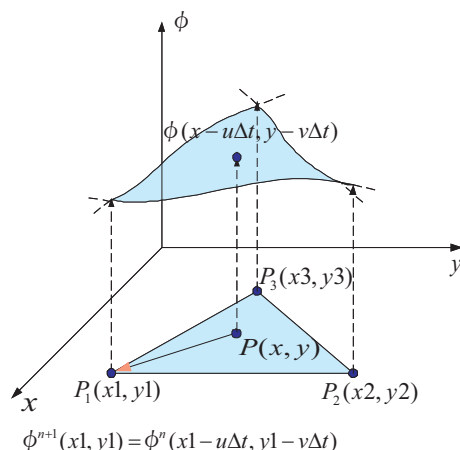


図-1 上流点の評価方法

3. 数値解析例

(1) 解析モデル及び解析条件

本手法の有効性を検討するため, 不透水性構造物越流問題⁴⁾を取り上げる。図-2 に解析モデルを示す。

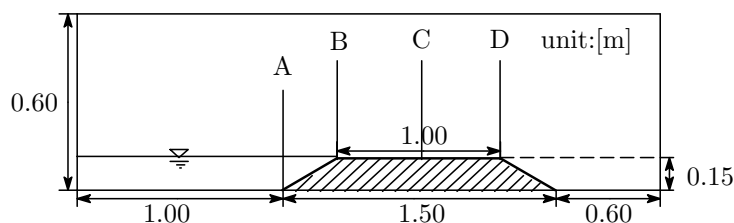


図-2 解析モデル

斜線部分に, 障害物として不透水性構造物を設ける。初期条件として構造物上流側に水を満たし, 解析領域全体の流速 $\mathbf{u}$ を 0 とする。流入条件としては, 計算開始 20 秒後に設定流量の 29.87[l/sec] となるように直線的に流量を増加させ, その後は一定流量を与える。流出条件としては, 下流端で自由流出とする。また, 壁面, 構造物上面を slip 条件とし, 構造物左右斜面を non-slip 条件とする。水路勾配については, 基礎式の重力加速度項において重力を方向成分に分解することで表現する。なお, 水路勾配は 1/100 を用いる。以上の条件により, 流況解析を行い, 水面形と図-2A, B, C, D 断面における流速分布を実験値と比較し, 本手法の有効性を検討する。

(2) 解析結果

図-3 に構造物越流の様子を示す。これより, 構造物周辺の流況を数値解析により表現できていることがわかる。

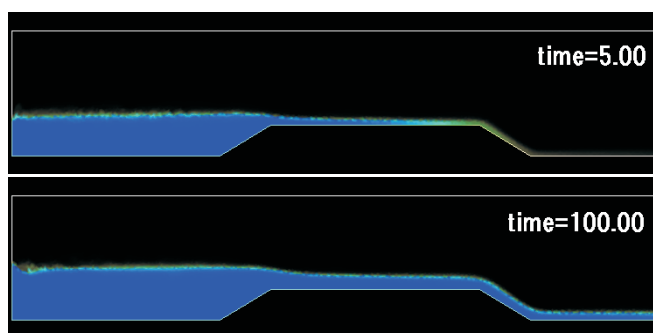


図-3 水面形時刻歴 (CIVA 法)

図-4 に構造物越流後の平均的な水面形を示す。ここで, 図中の EXP. は実験値, FDM は既存の解析結果, CIVA/VOF は本手法の解析結果を表す。

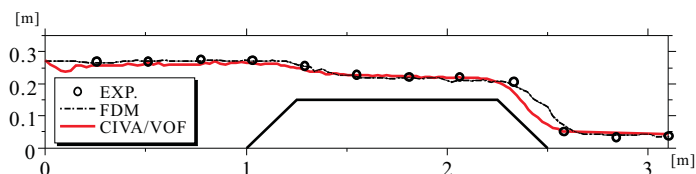


図-4 水面形の実験値と解析値の比較

これより, 本手法における水面形は, 実験値と良い一致を示していることがわかる。また, 既存の解析結果と比較すると, 構造物越流後の水面形において差異が見られた。ここで, 図-2 の A, B, C, D 断面における流速分布の実験値との比較は講演時に示す。

4. おわりに

本研究では, 構造物周辺の流れを定量的に把握するため, CIVA/VOF 法に基づく構造物周辺の流況解析手法の構築を行った。数値解析例として, 不透水性構造物越流解析を取り上げ, 以下の結論を得た。

- 自由表面を有する構造物周辺の流況を VOF 法を用いることで表現することができた。
- 本手法による水面形は実験値と良い一致を示した。

今後は, 間隙を含む構造物周辺の流況解析を行う予定である。

参考文献

- 1) 桜庭雅明, 弘崎聡, 檜山和男:自由表面流れのための CIVA/VOF 法にもとづく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学論文集, Vol.6, pp.215-222, 2003.
- 2) Nakayama, T. and Shibata, M.: A finite element technique combined with gas-liquid two-phase flow calculation for unsteady free surface flow problems, *Comput. Mechanics*, **22**, pp.194-202, 1998, No.56-531, pp.3248-3256, 1990.
- 3) 田中伸厚:数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集 (B 編), **64** 巻 620 号, pp.1071-1078, 1998.
- 4) 前野志朗, 道奥康治, 森永智, 菊池慶太:捨石堰周辺の流況解析, 水工学論文集, 第 **48** 巻, pp.829-834, 2004.